

Zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte stationärer stochastischer Prozesse

**Entwicklung, Grundlagen und statistische Eigenschaften
von analogen und digitalen Schätzverfahren**

von
Franz Dittrich

Erlangen
1985

1986 № 498



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte stationärer stochastischer Prozesse

**Entwicklung, Grundlagen und statistische Eigenschaften
von analogen und digitalen Schätzverfahren**

von

Franz Dittrich

Erlangen

1985

Als

Habilitationsschrift

angenommen von der

Technischen Fakultät der
Universität Erlangen - Nürnberg

1985

Berichter: Prof. Dr. H. Schlitt
Prof. Dr. H.W. Schübler

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Oberingenieur am Institut für Regelungstechnik der Universität Erlangen - Nürnberg.

Meinem langjährigen Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Schlitt, dem Vorstand des Instituts, gilt mein besonderer Dank für sein Interesse und seine Diskussionsbereitschaft, durch die er mich bei der Durchführung der Arbeit stets gefördert hat.

Herrn Prof. Dr. H.W. Schübler danke ich herzlich für die Übernahme des Mitberichtes und damit verbunden für zahlreiche Anregungen, die ich gerne in den Text eingearbeitet habe.

Bei meinen Mitarbeitern am Institut bedanke ich mich für ihre Bereitschaft zu klärenden Gesprächen und für die Hilfe bei der Erstellung dieser Niederschrift.

Schließlich möchte ich auch meiner Frau Gisela und meinen beiden Töchtern für die Geduld und Toleranz danken, die sie mir besonders in kritischen Zeiten während der Entstehung dieser Arbeit mit großer Liebe entgegengebracht haben.

Erlangen, im Dezember 1985

Franz Dittrich

Vorwort

In einer 1978 erschienenen Anthologie mit dem Titel "Modern Spectrum Analysis", die vornehmlich aus Zeitschriftenbeiträgen über die sogenannte Maximum-Entropie-Methode zusammengestellt ist, sind zwei Arbeiten über die Schätzung von Leistungsdichtespektren auf der Grundlage der "Schnellen-FOURIER-Transformation" aus dem Jahre 1967 unter der Überschrift "Historisches" aufgenommen worden. Analoge Spektralschätzverfahren, die beispielsweise in der Schall- und Schwingungsanalyse eingesetzt werden, vor allem aber im Bereich der Spektrumsmessung hochfrequenter Signale einen unbestrittenen Platz einnehmen, werden in diesem Zusammenhang gar nicht mehr erwähnt.

Es ist vielleicht bezeichnend, daß in einem vergleichsweise jungen Wissenschaftszweig, wie der Spektralanalyse stochastischer Prozesse, deren theoretische Grundlagen in den dreißiger Jahren erarbeitet worden sind und deren praktische Bedeutung eigentlich erst nach dem zweiten Weltkrieg zum Tragen gekommen ist, Verfahren, die sich in weiten Bereichen gerade durchzusetzen beginnen und deren gerätetechnische Realisierung sich sogar noch in der Entwicklung befindet, kurze Zeit nach dem Aufkommen einer neuen Richtung, nämlich der sogenannten parametrischen Schätzverfahren, bereits unter der Rubrik "Geschichtliches" eingestuft werden.

Dem steht gegenüber, daß in zahlreichen ingenieurwissenschaftlich orientierten Büchern auch in jüngerer Zeit für die spektrale Leistungsdichte eine Definition verwendet wird, die nachweislich unbrauchbar ist, weil die Streuung eines darauf begründeten Schätzwertes - auch im Grenzfall unendlich langer Meßsignale - ebenso groß wie der Wert des Spektrums bei der betrachteten Frequenz selbst ist.

Diese Widersprüchlichkeit zwischen einer außergewöhnlich schnellen Entwicklung neuer Spektralschätzverfahren und deren kurzfristiger praktischer Anwendung einerseits und einer dazu vergleichsweise rückständigen Behandlung dieses Themas in bestimmten Bereichen der Ingenieurwissenschaften andererseits stellt ein wesentliches Motiv für die Anfertigung dieser Arbeit dar.

Darüber hinaus erscheint es reizvoll zu versuchen, die Entwicklung der spektralen Schätzverfahren, deren Wurzeln noch in das vergangene Jahrhundert zurückreichen und die mit Namen wie SCHUSTER, WIENER, KOLMOGOROV und KHINTCHINE verbunden ist, zusammenhängend darzustellen und darauf aufbauend, die spezifischen Eigenschaften der einzelnen Schätzverfahren sowie bestehende Querverbindungen untereinander sichtbar zu machen.

Den Betrachtungen über die verschiedenen Methoden zur Schätzung des Leistungsdichtespektrums sowie den Untersuchungen ihrer statistischen Eigenschaften liegt dabei die Idee zugrunde, das zur Verfügung stehende Signal als Teil einer Musterfunktion eines stationären stochastischen Prozesses anzusehen. Damit besteht die Schätzaufgabe nicht mehr darin, eine spektrale Kenngröße des Meßsignals zu bestimmen, sondern vielmehr das Leistungsdichtespektrum des "unterlegten" stochastischen Prozesses zu schätzen.

Im Hinblick auf diese Problemstellung steht am Anfang der Betrachtungen eine kurze Einführung in das Konzept der stochastischen Prozesse und deren spektrale Kennzeichnung. Für die Darstellung der verschiedenen Spektralschätzverfahren selbst wird davon ausgegangen, daß analoge und digitale nichtparametrische sowie parametrische Schätzwerte als gleichbedeutend anzusehen sind. Das soll heißen, daß die Zielsetzung der Arbeit nicht darin besteht, die Überlegenheit einzelner Schätzverfahren herauszustellen, sondern über die Diskussion der wesentlichen Merkmale, wobei die Untersuchungen der statistischen Eigenschaften einen deutlichen Schwerpunkt bilden, zu Aussagen über die Vor- und Nachteile der einzelnen Schätzwerte zu kommen und vorhandene Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Verfahren deutlich zu machen.

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung und historische Anmerkungen	1
1.	Übersicht und Themenabgrenzung	1
2.	Beispiele für die Anwendung von Spektralschätzverfahren	3
3.	Zur historischen Entwicklung der Spektralschätzverfahren	3
II	Grundlagen und Darstellung stationärer stochastischer Prozesse im Frequenzbereich	7
4.	Kennzeichnung und Eigenschaften stochastischer Prozesse	22
4.1	Kontinuierliche und diskrete Parameterprozesse	22
4.2	Stationäre Prozesse, Ergodizität	25
4.3	GAUSSverteilte stationäre Prozesse	26
5.	Spektrale Kennzeichnung kontinuierlicher Parameterprozesse	35
5.1	Die Spektralverteilungsfunktion	35
5.2	Die spektrale Leistungsdichte	40
5.3	Die Leistungsdichte als Grenzwert des Periodogramms	42
5.4	Die Spektralzerlegung stationärer Prozesse	45
5.5	Zusammenhang mit der Leistungsdichte	45
6.	Spektrale Kennzeichnung von diskreten Parameterprozessen	46
6.1	Spektralzerlegung der Kovarianzfolge	46
6.2	Die Spektralzerlegung des Prozesses	46
6.3	Das Dichtespektrum als Grenzwert des Periodogramms	51
7.	Modelle für diskrete Parameterprozesse	52
7.1	Autoregressive Prozesse	54
7.2	Moving-Average-Prozesse	55
7.3	ARMA-Prozesse	56
8.	Erzeugung diskreter Parameterprozesse durch Abtaster	61
8.1	Das Spektrum einer äquidistant abgetasteten Funktion	61
8.2	Äquidistante Abtastung eines stationären Prozesses	64
III	Analoge und digitale Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte	66
9.	Einführende Bemerkungen zu den Schätzverfahren	68
9.1	Gewinnung und Beurteilung von Schätzwerten für die Leistungsdichte	68
9.2	Schätzwerte für die Kovarianzfunktion	71

9.3 Das Periodogramm	70
.1 Das Periodogramm als "natürlicher" Schätzwert für S_x	78
.2 Die Verteilungsdichte des Periodogramms	82
.3 Konvergenz des Periodogramms	89
.4 Kovarianz und asymptotische Eigenschaften	90
.5 Das Periodogramm als Maximum-Likelihood-Schätzwert	95
9.4 Klassifizierung der Schätzverfahren	97
10. Analoge Messung der spektralen Leistungsdichte	99
10.1 Begründung und Realisierungsmöglichkeiten der Meßvorschrift	99
10.2 Das Suchfrequenzverfahren mit Bandpaßfilterung	102
.1 Erwartungswert und Verschiebung	104
.2 Varianz und Konsistenz der Schätzung	106
10.3 Das Suchfrequenzverfahren mit Tiefpaß als Analysierfilter	115
.1 Statistische Eigenschaften der Schätzung	116
.2 Reduktion der Varianz durch "symmetrische Messung"	117
10.4 Hybride Meßanordnungen	120
10.5 Allgemeine Bemerkungen zu den analogen Verfahren	125
.1 Abschätzung des Fehlers auf Grund der Einschwingvorgänge	125
.2 Auflösung bei kurzen Signallängen	126
.3 Anforderungen an die Dynamik	129
.4 Gleitende Mittelwertbildung und Endlosschleife	132
11. Nichtparametrische digitale Schätzverfahren	136
11.1 Einführende Bemerkungen	136
11.2 BLACKMAN-TUKEY und Periodogramm-Schätzwerte	140
.1 Der Erwartungswert der Schätzung	143
.2 Abschätzung des Verschiebungsfehlers	147
.3 Varianz und Nachweis der Konsistenz	151
.4 Die äquivalente Bandbreite der Schätzwerte	155
.5 Eine Näherung für die Verteilungsdichte	159
.6 Vergleich einiger Kovarianzgewichte und Spektralfenster	164
.7 Überlegungen zur Planung einer Spektralanalyse	177
.8 Einige Anmerkungen zum Gebrauch der DFT	179
11.3 WELCH-BARTLETT-Schätzwerte	185
.1 Der Einfluß von nichtkonstanten Datengewichtungen	186
.2 Statistische Eigenschaften der WB-Schätzwerte	188
.3 Kenngrößen von gebräuchlichen Datengewichtungen	193
.4 Bestimmung des optimalen Überlappungsgrades der Segmente	197
.5 Der Einfluß von Restsegmenten auf die Varianz	201

11.3.6 Entwurf einer WB-Spektralanalyse	207
.7 Anmerkungen zum Rechenaufwand	209
11.4 Ein zweistufiges Schätzverfahren	211
.1 Erwartungswert und Varianz	212
.2 Zusammenhänge mit anderen Verfahren	216
12. Parametrische digitale Spektralschätzverfahren	220
12.1 Die ME/AR-Schätzwerte	222
.1 Gewinnung des ME-Schätzwertes	224
.2 Zusammenhang mit den AR-Schätzverfahren	228
.3 AR-Schätzung und Lineare Prädiktion	231
.4 Die Kovarianzfunktion des ME/AR-Schätzwertes	235
.5 Statistische Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte	237
.6 Grundlagen für die Schätzung der Modellparameter	242
.7 Die YULE-WALKER-Methode	244
.8 Das Verfahren von BURG	250
.9 Ein Verfahren auf Grund minimaler Fehlerquadrate	253
.10 Kriterien zur Festlegung der Modellordnung	256
12.2 Der sogenannte Maximum-Likelihood-Schätzwert von CAPON	262
.1 Begründung des Schätzverfahrens	262
.2 Zusammenhang mit den ME/AR-Schätzwerten	266
.3 Anmerkungen zur Berechnung des ML-Schätzwertes	268
12.3 Schätzwerte auf der Grundlage eines MA-Modells	269
.1 Zur Schätzung der Modellparameter	269
.2 Zusammenhang mit den BT-Schätzwerten	271
12.4 ARMA-Modelle als Grundlage für Spektralschätzungen	272
.1 Ableitung der Normalgleichungen	273
.2 Zur Schätzung der Modellparameter	275
IV Anhang und Literaturübersicht	280
13. Anhang	280
13.1 Doppelsummen mit trigonometrischen Kernen	280
13.2 Häufig verwendete Summenformeln	280
13.3 Doppelintegrale mit trigonometrischen Kernen	281
13.4 Auswertung bestimmter Doppelintegrale	281
13.5 Auswertung eines speziellen Integrals	282
14. Literaturübersicht	284

I Einleitung und historische Anmerkungen

Das Problem der Schätzung von Leistungsdichtespektren tritt in verschiedenen Bereichen der Natur- und Ingenieurwissenschaften auf, wie z.B. in der Nachrichten-, Hochfrequenz- und Regelungstechnik, bei Schall- und Schwingungsanalysen im Maschinen- und Flugzeugbau, bei Radar- und Sonar-Anwendungen, in der Astronomie, Meteorologie und Geophysik. Darüberhinaus werden Spektralschätzverfahren seit langem für die Analyse von ökonomischen Prozessen sowie als Hilfsmittel zur Erstellung von Diagnosen in der Medizin eingesetzt; auf einige dieser Anwendungen wird im 2. Kapitel näher eingegangen.

Ansonsten soll im folgenden ein Überblick über die Ziele und Einschränkungen dieser Arbeit sowie über die Entwicklung der Spektralanalyse im Sinne einer FOURIER-Zerlegung von stochastischen Signalen bzw. Prozessen gegeben werden.

1. Übersicht und Themenabgrenzung

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Schätzung von Leistungsdichtespektren stationärer stochastischer Prozesse behandelt. Diese Themenstellung beinhaltet zwei wesentliche Aussagen: Zum einen beschränken sich die Untersuchungen auf die Schätzung der Dichtespektren rein stochastischer Prozesse, d.h. auf kontinuierliche Spektren im Gegensatz zu Linien- oder Mischspektren, wie sie bei Prozessen mit deterministischen Komponenten auftreten. Das hat zur Folge, daß bestimmte Schätzverfahren, wie z.B. die sogenannte "Harmonische Dekomposition" von PISARENKO /286/ oder das Verfahren zur Schätzung von Spektrallinien nach PRONY /293/ von vornherein unberücksichtigt bleiben.

Der zweite in der Themenwahl auffallende Punkt ist, daß offenbar nicht das Leistungsdichtespektrum eines einzelnen Signals, nämlich des Meßsignals, geschätzt werden soll, sondern das eines ganzen Prozesses. Die Grundlage für diese Aussage bildet der von H. WOLD /41/ gemachte Vorschlag, das für die Analyse zur Verfügung stehende Signal als Teil einer Musterfunktion eines stochastischen Prozesses anzusehen und daraus interessierende Kenngrößen des "unterlegten" Prozesses, hier i.w. das Leistungsspektrum, zu schätzen. Die Bedeutung dieser Idee für die statistischen Schätzverfahren ist offensichtlich: Mit den für den Prozeß definierten Kenngrößen bzw. -funktionen wie Linearer und Quadratischer Mittelwert,

Kovarianzfunktion oder Leistungsdichtespektrum besitzt man Bezugsgrößen, anhand derer man die Güte der zum Teil "willkürlich" konstruierten Schätzwerte objektiv beurteilen kann. Entscheidend ist, daß dabei die Prozeßkenngrößen nicht wirklich bekannt sein müssen. Auf die sorgfältige Darstellung dieser Zusammenhänge wird in der Arbeit besonderes Gewicht gelegt.

Die eigentlichen Schwierigkeiten bei der Schätzung der spektralen Leistungsdichte stationärer Prozesse bestehen weniger in der praktischen Durchführung, z.B. mithilfe einer geeigneten analogen Meßschaltung oder eines Rechenalgorithmus' im Fall der digitalen Schätzverfahren, als vielmehr in der richtigen Interpretation der Ergebnisse. Aus diesem Grunde beziehen sich die Darstellungen der Schätzverfahren auch nicht auf die Beschreibung spezieller Schaltungen oder konkreter Algorithmen, sondern auf das Erarbeiten der wesentlichen Eigenschaften der verschiedenen Methoden sowie auf bestimmte Zusammenhänge untereinander.

Um dieses Ziel zu erreichen und darüberhinaus interessante Entwicklungen deutlich zu machen, werden bestimmte Aspekte einzelner Schätzmethoden zum Teil sehr ausführlich behandelt. Das hat zur Folge, daß sich in der Arbeit verschiedene Schwerpunkte ergeben haben, und daß dafür andere Verfahren aus dem Bereich der Spektralanalyse nur andeutungsweise oder überhaupt nicht behandelt werden. Mit dieser Bemerkung ist nebenbei eine Antwort auf die Frage gegeben worden, wie eine Arbeit über ein so umfassendes Thema wie die Spektralanalyse grundsätzlich angelegt werden kann. Eine Alternative zu der hier gewählten Form stellt der ausgezeichnete Übersichtsbeitrag "Spectrum Analysis - A Modern Perspective" von KAY und MARPLE / 50 / dar, in dem allerdings nur digitale Schätzverfahren dargestellt und miteinander verglichen werden.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich schwerpunktmäßig auf die Darstellung der analogen und digitalen nichtparametrischen Schätzverfahren, wobei die letzteren heute i.w. mithilfe der FFT realisiert werden, und der sogenannten "Maximum-Entropie-" oder "Autoregressiven-" Schätzmethode als wichtigsten Repräsentanten der parametrischen Verfahren. Hierbei wird primär gar kein Schätzwert für die Leistungsdichte im üblichen Sinn bestimmt, sondern es werden die Parameter eines Modells für den unterlegten Prozeß geschätzt; das Spektrum ist dann durch die Struktur des Prozeßmodells festgelegt.

Einen zweiten Schwerpunkt bildet der Versuch, die Beurteilung der statistischen Eigenschaften der Schätzwerte in einer einheitlichen Form darzustellen. Dabei ergeben sich gewisse Schwierigkeiten hinsichtlich der benötigten mathe-

matischen Hilfsmittel, so daß bestimmte Beweise im Zusammenhang mit den theoretischen Grundlagen der stochastischen Prozesse ebenso ausgelassen werden wie die mathematisch relativ aufwendige Ableitung der asymptotischen Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte.

An dieser Stelle erscheint es angebracht, andere Verfahren der Spektralanalyse, auf die in der Arbeit nicht eingegangen wird, wenigstens zu erwähnen. Hierzu zählen die digitalen Filter- und Filterbanktechniken /30,294/ sowie die sogenannte Komplexe Demodulation /295/, die im Prinzip einer digitalen Suchtonanalyse entspricht. Darüberhinaus wird aus Platzgründen auch darauf verzichtet, die statistisch sehr interessanten Schätzverfahren auf der Grundlage stochastisch abgetasteter Signale zu behandeln /276, 283/.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Teile. Der I. Teil umfaßt neben dieser Einleitung eine Übersicht über Anwendungen von Spektralschätzverfahren in verschiedenen ingenieurwissenschaftlichen und nicht-technischen Bereichen sowie im 3. Kapitel eine ausführliche Darstellung der historischen Entwicklung der Schätzverfahren, wobei insbesondere auch weniger bekannte Beiträge herausgestellt werden, die teilweise vor den berühmten und üblicherweise als "Meilensteine der Entwicklung" genannten Arbeiten von SCHUSTER, WIENER, KHINTCHINE sowie TUKEY und BURG erschienen sind.

Im II. Teil werden die wesentlichen Grundlagen für die Schätzverfahren zusammengestellt. Dazu zählen neben einer kurzen Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse vor allem die spektrale Kennzeichnung von kontinuierlichen und diskreten Parameterprozessen in den Kapiteln 5 und 6 sowie die Beschreibung verschiedener Modelle für diskrete Parameterprozesse. Im 8. Kapitel wird auf die Erzeugung solcher Prozesse durch Abtasten und die damit verbundenen Probleme eingegangen.

Die Darstellung der analogen und digitalen Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte im III. Teil beginnt mit einigen allgemeinen Betrachtungen zur Gewinnung und Beurteilung von Schätzwerten für die Leistungsdichte und für die Kovarianzfunktion im 9. Kapitel. Einen gewissen Schwerpunkt bildet dabei die Untersuchung des sogenannten Periodogramms, das sowohl für die Entwicklung als auch für bestimmte Schätzverfahren selbst von zentraler Bedeutung ist.

Im 10. Kapitel werden die analogen Verfahren einschließlich der sogenannten hybriden Meßanordnungen behandelt, wobei insbesondere ein weniger bekanntes Suchtonverfahren dargestellt wird, in dem das Meßsignal

gleichzeitig mit einem Sinus- und einem Cosinussignal moduliert wird. Durch diese sogenannte "symmetrische" Messung der Leistungsdichte kann die Varianz des Schätzwertes bei sonst gleichbleibenden Eigenschaften um nahezu 50% reduziert werden.

Das 11. Kapitel enthält die Darstellung und Untersuchung der digitalen nichtparametrischen Schätzverfahren, zu denen die BLACKMAN-TUKEY- oder indirekten, die Periodogramm- oder direkten und die sogenannten WELCH-BARTLETT-Schätzwerte gehören. Bei den indirekten Verfahren erfolgt die Berechnung des Spektralschätzwertes über den "Umweg" einer gewichteten Kovarianzschätzung, während bei den direkten Methoden unmittelbar aus den Daten eine spektrale Kenngröße, nämlich das Periodogramm gewonnen und anschließend in geeigneter Weise geglättet wird. Diese Vorgehensweise ist im Prinzip auch in der WELCH-BARTLETT-Methode enthalten, allerdings erfolgt dort die Glättung durch einfache Mittelung über mehrere Periodogramme, die aus sich überlappenden Datensegmenten berechnet werden. Das Kapitel wird mit der Beschreibung eines "zweistufigen Schätzverfahrens" abgeschlossen, das alle gebräuchlichen nichtparametrischen digitalen Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte als Sonderfälle in sich vereint.

Die parametrischen oder datenabhängigen Spektralschätzverfahren werden im 12. Kapitel behandelt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Darstellung der sogenannten "Maximum-Entropie-Methode" und deren Zusammenhang mit den "Autoregressiven Verfahren" sowie der "Linearen Prädiktion". Außerdem wird ein Schätzverfahren vorgestellt, das unter dem Namen "Maximum-Likelihood-Methode" bekannt ist und ursprünglich für die Schätzung von Wellenzahlspektren eingeführt worden ist. Die Ausführungen über die parametrischen Schätzverfahren werden mit einigen allgemeinen Betrachtungen über Spektralschätzwerte auf der Grundlage von sogenannten "Moving-Average" und ARMA-Modellen abgeschlossen.

Der IV. und letzte Teil enthält im 13. Kapitel einen kurzen Anhang, in dem häufig verwendete Summen- und Integralbeziehungen zusammengestellt sind, und im 14. Kapitel eine gegliederte Literaturübersicht zum erweiterten Themenkreis der Arbeit.

2. Beispiele für die Anwendung von Spektralschätzverfahren

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über die Anwendung von Spektralschätzverfahren in verschiedenen technischen und nichttechnischen Bereichen gegeben werden. Dabei beschränken sich die Aussagen teilweise auf die einfache Nennung bekannter Anwendungen.

So gehört heute der Einsatz von spektralanalytischen Methoden als Hilfsmittel für den Entwurf von Filtern, Übertragungssystemen und Regelungen schon fast zu den Alltagsaufgaben eines Ingenieurs, der sich mit diesen Problemkreisen beschäftigt, und bedarf kaum einer näheren Beleuchtung. Ähnliches gilt für die Schallanalyse in Maschinenhallen oder durch Verkehrslärm stark belasteten Wohngebieten als Grundlage für Arbeits- und Umweltschutzmaßnahmen.

Andere wichtige Anwendungsbeispiele aus dem maschinenbaulichen Sektor sind die vorbeugende Maschinenüberwachung anhand von Schwingungsspektren und die Betriebsüberwachung von Kernreaktoren. Hierbei interessieren vor allem die Einflüsse von hydromechanischen Kopplungen, Temperatureffekten und Kühlmittelinstabilitäten /271/.

Bei der Lösung von Festigkeits- und Stabilitätsproblemen im Flugzeugbau werden Spektrumsmessungen in zweifacher Hinsicht verwendet: Zum einen bei der Schwingungsanalyse z.B. an Tragflächen und zum anderen für die Messung der Spektren von atmosphärischen Turbulenzen und Windböen als Grundlage für entsprechende Simulationsstudien. In diesem Zusammenhang soll noch ein weiteres Beispiel aus dem Bereich der Flugtechnik erwähnt werden, nämlich die Messung des "Frequenzganges" des Menschen als Pilot, der sowohl für regelungs- als auch für anthropotechnische Maßnahmen von Bedeutung ist. Auf Grund der ausgeprägten Lern- und Adaptionsfähigkeit des Menschen scheiden dabei deterministische, z.B. periodische Testsignale i.a. aus.

Ähnliche Probleme wie in der Flugtechnik liegen im Schiffsbau und in der Schifffahrt selbst vor. Hier interessieren u.a. die Wellenbewegungen bei unterschiedlichen Windgeschwindigkeiten, die ebenfalls vornehmlich mit Spektralschätzverfahren analysiert werden; verschiedene Literaturhinweise zu diesem Themenkreis finden sich in /143/.

Über die bisher genannten und vornehmlich technisch orientierten Anwendungen der Spektralanalyse hinaus werden diese Verfahren in der Astronomie, der Wetter- und Klimaforschung, der Ökonomie sowie in der Medizin und der Geophysik eingesetzt.

Aus dem Gebiet der Astronomie sollen hier nur die Untersuchungen der Sonnenaktivitäten erwähnt werden und insbesondere auf die sogenannten WOLFERSchen Zahlen der Sonnenflecken hingewiesen werden, die seit Mitte des 18. Jahrhunderts registriert werden und eine der ältesten "natürlichen" Zufallsfolgen darstellt, deren Analyse sich wie ein roter Faden durch die geschichtliche Entwicklung der Spektralschätzverfahren zieht, vgl. Kapitel 3.

Bei der Untersuchung von ökonomischen Prozessen, wie z.B. der Entwicklung der Weltmarktpreise von Rohstoffen und Nahrungsmitteln oder der Primärproduktion von Metallen in einer Volkswirtschaft, geht es zwar zunächst darum, geeignete Modelle für den Entwicklungstrend zu erstellen, aber darüberhinaus wird versucht, anhand von Spektralanalysen der Schwankungen um diesen Grundtrend die Wirkung äußerer Einflüsse zu erkennen, um daraus Schlüsse auf die zukünftige Entwicklung und für eine darauf abgestimmte Planung ziehen zu können /277, 284/.

Das Hauptanwendungsgebiet von Spektralschätzverfahren im Bereich der Medizin stellt die Analyse von Elektroenzephalogrammen (EEG) dar. Durch elektrische Aktivitäten in der Hirnrinde treten Potentialdifferenzen auf der Kopfhaut auf, die mithilfe von Elektroden in Form eines EEGs gemessen werden können. Das EEG ist von grundlegender Bedeutung für die Diagnose bestimmter Hirnschäden und Geisteskrankheiten sowie für die Schlaforschung. Die EEGs weisen gewisse periodische Anteile in einem ansonsten statistisch schwankenden Signalverlauf auf; für Diagnosezwecke interessieren dabei die Anwesenheit, Lage und Intensität der entsprechenden Resonanzüberhöhungen im Leistungsdichtespektrum, die sogenannten Rhythmen. Daraus ergibt sich die Aufgabe, mithilfe spektralanalytischer Methoden ein möglichst einfaches Modell für das EEG-Spektrum zu entwickeln, in dem die wesentlichen Rhythmen enthalten sind, so daß anhand von Messungen das Fehlen oder andere Anomalitäten nachgewiesen werden können.

Das folgende Beispiel, auf das etwas näher eingegangen werden soll, stammt aus dem Bereich der Geophysik. Es geht darum zu untersuchen, ob gewisse Gesetzmäßigkeiten, speziell Periodizitäten in der Auftretensrate von Erdbeben, nachgewiesen werden können. Viele Erdbeben entstehen dadurch, daß sich Scherspannungen in den oberen 100 km der Erdkruste plötzlich lösen, und es stellt sich die Frage, ob es ggf. Triggereinflüsse wie z.B. die Schwankungen in der Rotationsgeschwindigkeit der Erde gibt, die in Perioden von 6 und 12 Monaten auftreten. Den Aussagen liegt eine Untersuchung /278/ anhand der registrierten Erdbeben mit einer Stärke

größer 5,2 auf der sogenannten RICHTER-Skala in den Jahren 1964 bis 1974 zugrunde. Nach einer geeigneten Datenaufbereitung wurden die Leistungsdichtespektren von drei nichtüberlappenden Datensegmenten bestimmt, die alle eine ausgeprägte Resonanzüberhöhung bei einer Frequenz von ungefähr $1/(235 \text{ Tage})$ aufweisen. Da jedes Segment im Rahmen der Schätzgenauigkeit die gleichen spektralen Eigenschaften besitzt, kann gefolgert werden, daß in Zeiträumen von 2 Monaten bis 2 Jahren die Erdbebenauftrittsrates als stationär angenommen werden kann und eine ausgeprägte Schmalbandkomponente bei einer Periode von 235 Tagen, das sind etwa $7\frac{1}{2}$ Monate, enthält. Darüberhinaus wird deutlich, daß Streßeinflüsse auf Grund der Schwankungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde zumindest nicht linear mit der Auftrittsrates der Erdbeben korreliert sind.

Zum Abschluß soll noch ein interessantes Beispiel aus dem Bereich der Klimaforschung skizziert werden /256/. Die Fragestellung ist, ob die Variationen bestimmter Orbitalparameter, nämlich die 100 000-Jahr-Periode der Exzentrizität, die 42 000-Jahr-Periode der Schiefe und die 23 000-Jahr-Periode der Präzession ¹⁾ der Ekliptik, einen Einfluß auf die Langzeit-Entwicklung des Klimas auf der Erde haben. Als Indikatoren für die Klimaschwankungen in den vergangenen 400 000 Jahren werden drei ozeanographische Parameter verwendet, die anhand der Ablagerungen auf dem Meeresgrund bestimmt werden können. Diese Parameter sind 1) die Auftrittshäufigkeit von Strahlentierchen (Radiolarien), die auch heute noch im Plankton enthalten sind und deren Vorkommen sehr stark von der Wassertemperatur abhängt, 2) der Überschuß einer bestimmten Spezies von Radiolaria, der Rückschlüsse auf den Salzgehalt des Oberflächenwassers zuläßt, und 3) ein spezielles Verhältnis von Sauerstoffisotopen, das als Maß für die Zu- und Abnahme des Eisschildes auf der nördlichen Halbkugel angesehen wird. Die Bohrproben der Sedimente werden in 10 cm-Abständen analysiert und mithilfe geeigneter Verfahren, wie z.B. der C^{14} -Methode, als Funktionen der Zeit dargestellt. Die geschätzten Leistungsdichtespektren aller drei Zeitreihen weisen ausgeprägte Spitzen bei Frequenzen auf, zu der Perioden von 100 000 Jahren gehören, und kleinere Überhöhungen bei Perioden von 40 000 und 23 000 Jahren.

1) Unter Präzession versteht man die Verlagerung der Tagundnachtgleichenpunkte auf Grund der kegelförmigen Bewegung der Erdachse um die Achse der Ekliptik.

Durch dieses Ergebnis, das eine deutliche Korrelation zwischen den Schwankungen der Ekliptik und der Langzeit-Klimaentwicklung auf der Erde bestätigt, werden nicht nur bestehende Theorien über den zyklischen Charakter des Erdklimas, z.B. hinsichtlich der Eiszeiten, erhärtet, sondern auch die Erstellung von Prognosen für die globale Entwicklung des Klimas auf der Erde möglich gemacht.

Mit diesem Beispiel soll die Aufzählung bzw. Kurzbeschreibung von Anwendungen spektraler Schätzverfahren in verschiedenen Bereichen abgeschlossen werden. Im nächsten Kapitel wird ein Überblick zur historischen Entwicklung dieser Verfahren gegeben, wobei der Schwerpunkt auf der Schätzung der spektralen Leistungsdichte stochastischer Signale bzw. Prozesse liegt.

3. Zur historischen Entwicklung der Spektralschätzverfahren

In diesem Kapitel soll ein Überblick über die Entwicklung der analytischen und experimentellen Verfahren zur Spektralanalyse stationärer stochastischer Prozesse gegeben werden. Es ist selbstverständlich, daß eine solche Darstellung keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Objektivität erheben kann, vielmehr wird die Auswahl der verwendeten Zitate zum einen vom bibliographischen Zugriff und zum anderen von einer subjektiven Bewertung durch den Verfasser beeinflußt. Dabei wird versucht, auch weniger bekannte Beiträge zur Geltung zu bringen, die hinsichtlich der Originalität zum Teil vor den sogenannten Meilensteinen der Entwicklung erschienen sind, die üblicherweise mit den Namen A. SCHUSTER, N. WIENER, J.W. TUKEY und J.P. BURG gekennzeichnet werden.

Der Begriff "Spektrum" ist ursprünglich von I. NEWTON, 1704 / 72/, für die Zerlegung des Sonnenlichtes durch ein Prisma eingeführt worden; NEWTON verwendet dabei das lateinische Wort "spectrum" für Bild oder Abbild.

Die Untersuchung des Lichtes und dabei nicht nur des weißen Lichtes, bildet den Ausgangspunkt für die Entwicklung von praktischen und theoretischen Verfahren der Spektralanalyse im weitesten Sinn. Verfolgt man diese Entwicklung etwas genauer, so wird deutlich, daß sie im wesentlichen in zwei Richtungen geführt hat, die im folgenden kurz skizziert werden sollen. Zum einen haben die Arbeiten über das weiße Licht, wobei vor allem die Beiträge von LORD RAYLEIGH und A. SCHUSTER zu nennen sind, auf die Spektralanalyse im Sinne einer FOURIER-Zerlegung stochastischer Signale geführt. Dabei besteht das Ziel zunächst darin, gewisse im Signal nicht erkennbare Gesetzmäßigkeiten, wie z.B. periodische Anteile, aufzudecken. Die Weiterverfolgung dieses Problems hat auf die Spektralzerlegung stationärer stochastischer Prozesse geführt. Da die Grundlagen und die Entstehung der Schätzverfahren für die spektrale Leistungsdichte in enger Beziehung zu dieser Entwicklung stehen, wird sie im weiteren Verlauf dieses Kapitels ausführlicher dargestellt.

Im Gegensatz dazu haben die Beobachtungen von R.W. BUNSEN, der seine Experimente mit einem Prisma nicht wie NEWTON mit Sonnenlicht sondern mit der Flamme eines in Kochsalzlösung getränkten Dochtes durchgeführt hat, eine völlig andere Entwicklung in Gang gesetzt, deren Ausgangspunkt die zusammen mit G.R. KIRCHHOFF, 1860 / 70 /, begründete "Chemische Analyse durch Spek-

tralbeobachtungen" bildet. Dabei geht es um den Nachweis bestimmter Elemente mit Hilfe ihrer Emissions- und Absorptionsspektren, wobei sich der Aspekt der Analyse zunächst primär auf die zu untersuchenden Stoffe und weniger auf die optischen Spektren bezieht.

Die Spektren selbst rücken eigentlich erst im Zusammenhang mit der Frage nach ihrer Entstehung in den Vordergrund des Interesses, wobei hier nicht die Erzeugung der Spektren etwa durch eine Spalt-Prisma-Anordnung gemeint ist, sondern die Entstehung der für die verschiedenen Elemente typischen Formen. Diese Frage, die mit den Möglichkeiten der klassischen Physik nicht beantwortet werden kann, bildet den Ausgangspunkt für die Entwicklung der modernen statistischen Modelle für den Aufbau und die Vorgänge im Inneren der Atome.

Eine detaillierte, stark mathematisch ausgerichtete Darstellung dieser Entwicklungen und der Querverbindung zwischen der Spektraltheorie der Atome und der Spektralzerlegung stochastischer Prozesse findet sich in einem Übersichtsaufsatz von E.A. ROBINSON, 1982 / 52 /.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit geht es ausschließlich um Spektren und Spektralanalysen im Sinne einer FOURIER-Zerlegung von stochastischen Signalen und Prozessen. Dazu sind neben den schon erwähnten Untersuchungen über das weiße Licht andere frühe Anwendungen bekannt, wie z.B. der Vorschlag von G.C. STOKES, 1879 / 81 /, einen mechanischen FOURIER-Analysator für das Auffinden von periodischen Anteilen in astrophysikalischen Daten einzusetzen, der Beitrag von M.I. PUPIN, 1894 / 73 /, in dem die Analyse nichtperiodischer Wechselströme mit Hilfe eines elektrischen Resonanzkreises beschrieben wird, oder die Einführung der Suchtonanalyse mit Hilfe eines Dynamometers durch TH. DES COUDRES, 1898 / 61 /.

Das Problem der "Suche nach verborgenen Periodizitäten", in gemessenen Daten kann gleichsam als Überschrift zu einem ersten Entwicklungsabschnitt dieser Form der Spektralanalyse angesehen werden. Im Prinzip gehen die hierzu entwickelten Verfahren von der Vorstellung aus, daß sich das beobachtete Signal additiv aus einem Nutzsignal und einer stochastischen Komponente zusammensetzt, wobei das Nutzsignal durch eine Summe von periodischen Schwingungen in der Form ¹⁾

1) Wenn keine Verwechslungen möglich sind, wird auf die Angabe der Laufparameter an den Summenzeichen verzichtet. Außerdem werden die Grenzen nicht geschrieben, wenn sie sich ins Unendliche erstrecken.

$$x(t) = \sum_{n=0}^N a_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n)$$

modelliert wird. Für $f_n \neq n \cdot f_0$, nennt man diese Funktionen nach H. BOHR fast periodisch.

Umfassende Darstellungen dieses Problemkreises finden sich in den Werken von K. STUMPF, 1937 / 82 /, und J. BARTELS, 1940 / 55 /.

Einen gewissen Höhepunkt in dieser Entwicklungsphase stellen ohne Zweifel die Arbeiten von A. SCHUSTER, 1898 / 76 /, 1900 / 77 /, 1906 / 78 / dar, wobei insbesondere auf die Einführung des Periodogramms hingewiesen werden soll, das im Bereich der Schätzverfahren für die spektrale Leistungsdichte stationärer stochastischer Prozesse eine zentrale Bedeutung erlangt hat. Nicht von ungefähr weist N. WIENER selbst darauf hin, daß die Keime der "Verallgemeinerten harmonischen Analyse" bereits in SCHUSTERS Arbeiten enthalten sind.

In der Literatur und bei SCHUSTER selbst finden sich verschiedene Definitionen des Periodogramms. Im folgenden werden die bis auf Konstanten mit der letzten Version von SCHUSTER übereinstimmenden Formen

$$I_T(f) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right|^2, \quad -\infty < f < \infty$$

im kontinuierlichen und

$$I_N(f) = \frac{\Delta t}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi f n\Delta t} \right|^2, \quad -\frac{1}{2\Delta t} < f \leq \frac{1}{2\Delta t}$$

im diskreten Fall verwendet.

Obgleich mit der Modellvorstellung von "verborgenen Periodizitäten" z.B. bei der Analyse astronomischer und meteorologischer Daten sehr erfolgreich gearbeitet worden ist, fehlt es nicht an begründeter Kritik hinsichtlich der Brauchbarkeit dieses Modells, vgl. H. BURKHARDT, 1904 / 56 /. Der Hauptpunkt der Kritik richtet sich dabei gegen die Annahme einer strengen Periodizität der einzelnen Komponenten in dem zugrundeliegenden Modell, für die es vielfach, z.B. im Bereich der Ökonomie, keine empirische Begründung gibt. In der Folgezeit gewinnen deshalb die statistischen Betrachtungsweisen bei der Analyse von gemessenen Daten zunehmend an Bedeutung.

1920 wird von G.I. TAYLOR / 83/ in einer Studie über Diffusion die Autokorrelationsfunktion eingeführt, wozu angemerkt werden soll, daß ursprünglich nur die auf den Nullwert normierte Funktion als Autokorrelierte bezeichnet worden ist.

Besonders deutlich wird die Abkehr von dem stochastisch gestörten deterministischen Modell in den Arbeiten von G.U. YULE. Ausgehend von einer unabhängigen Zufallsfolge ¹⁾ $w(n)$, $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, die durch Würfeln gewonnen wird, bildet YULE, 1921 /90/ durch eine lineare Operation der Form

$$x(n) = b_0 w(n) + b_1 w(n-1) + \dots + b_M w(n-M)$$

eine neue Folge $x(n)$ und weist nach, daß diese eine gewisse Tendenz zu "regulären" Schwankungen aufweist. Ähnliche Untersuchungen sind von E. SLUTSKY, 1927 / 79 /, durchgeführt worden. Das zugrundeliegende nicht-rekursive Schema entspricht einer "gleitenden Mittelung" über M benachbarte Werte der Folge $w(n)$ und wird nach einem Vorschlag von H. WOLD, 1938 /41/, deshalb als "Moving-Average-Prozeß" bezeichnet.

In einer Studie über die sogenannte WOLFERsche Zahl der Sonnenflecken, die seit der Mitte des 18. Jahrhunderts registriert wird und eine auch schon von A. SCHUSTER, 1906 / 78 /, mit Hilfe des Periodogramms (unbefriedigend) untersuchte "natürliche" Zufallsfolge darstellt, beschreibt YULE, 1927 / 91 /, folgende Beobachtung: Eine "überlagerte" zufällige Störung, wie sie dem Modell der "verborgenen Periodizitäten" zugrunde liegt, ruft zwar mehr oder weniger starke Schwankungen der Amplitudenwerte hervor, hat aber keinerlei Einfluß auf die Periodendauer. Dagegen liefert eine, wie er es nennt, "echte Störung" vergleichsweise glatte Kurvenverläufe, bei denen sich aber die Amplitude und die Phase ständig ändern. Zur Beschreibung dieses Phänomens, für das er als Beispiel ein Pendel nennt, das in unregelmäßigen Zeitpunkten von rechts oder von links mit Erbsen beworfen wird, verwendet YULE das rekursive Schema

$$x(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + w(n) ,$$

¹⁾ Hier wird die vereinfachte Schreibweise $w(n)$ anstelle von $\{w(n)\}$ für die Folge verwendet, weil i.a. aus dem Zusammenhang deutlich wird, ob die Folge oder aber das n -te Element gemeint ist.

wobei $w(n)$ wiederum eine mittelwertfreie unabhängige Zufallsfolge ist, und bestimmt die Modellparameter a_1 und a_2 durch Regression aus den beobachteten Daten. Für die WOLFERSche Zahl der Sonnenflecken erhält er damit eine mittlere Periodendauer von 10,6 Jahren. Dasselbe Modell, allerdings für höhere Ordnungen, wird auch von G. WALKER, 1931 / 85/, im Zusammenhang mit einer Untersuchung über Luftdruckschwankungen in Port Darwin, einem Kernpunkt für die Wetterentwicklung auf der Erde, verwendet, wobei er u.a. zeigt, daß die Korrelationsfolge $r_x(k)$ demselben rekursiven Schema genügt wie die Zufallsfolge $x(n)$. Die Ausgleichsrechnung zur Bestimmung der Modellparameter $a_l, l=1, 2, \dots, L$, nach der Methode der minimalen Fehlerquadrate führt auf die sogenannten YULE-WALKER-Gleichungen, die für $L=2$ die Form

$$\begin{aligned}\hat{r}_x(1) &= a_1 \hat{r}_x(0) + a_2 \hat{r}_x(1) \\ \hat{r}_x(2) &= a_1 \hat{r}_x(1) + a_2 \hat{r}_x(0)\end{aligned}$$

haben. Da dieses Verfahren eine sogenannte Autoregression darstellt, wird das zugrundeliegende Modell - ebenfalls auf einen Vorschlag von WOLD zurückgehend - als "Autoregressiver Prozeß" bezeichnet. Die "Moving-Average"- und "Autoregressiven" Prozeßmodelle liegen den modernen parametrischen Spektralschätzverfahren zugrunde.

1925 wird von J.R. CARSON / 57/ in einer Arbeit über Filter und atmosphärische Störungen zum ersten Mal das Periodogramm als formale Definition für die spektrale Leistungsdichte eines stochastischen Signals vorgeschlagen. CARSON, der die hinsichtlich der Dimension äquivalente Bezeichnung "Energie-Frequenz-Spektrum" verwendet, gibt über die Definition hinaus gewisse Eigenschaften und vor allem einen interessanten Anwendungsfall an, nämlich die Berechnung der Leistung am Ausgang eines linearen Übertragungssystems bei bekannter Leistungsdichte des Eingangssignals.

Es ist bemerkenswert, daß CARSON, 1931 / 58/, in einer späteren Arbeit bereits darauf hingewiesen hat, daß die Definition der spektralen Leistungsdichte als Grenzwert des Periodogramms für statistische Signale unzureichend ist. Er führt deshalb das sogenannte Statistische-Energie-Frequenzspektrum ein, das im heutigen Sprachgebrauch nichts anderes als der Erwartungswert des Periodogramms für $T \rightarrow \infty$ ist. Leider ist diese Erkenntnis - vielleicht auf Grund der fehlenden mathematischen Begründung - in der Folgezeit teilweise wieder verloren gegangen, so daß das Periodogramm in der Entwicklung der spektralen Schätzverfahren für die Leistungsdichte stocha-

stischer Prozesse eine ausgesprochen zwiespältige Bedeutung erlangt hat. Eine mathematisch strenge Einführung der spektralen Leistungsdichte über den Umweg der integrierten Dichtefunktion wird zum ersten Mal von G.W. KENRICK, 1929 / 68 /, angegeben, der seine Ergebnisse einer frühen Arbeit von N. WIENER, 1924 / 87 /, über "die quadratische Variation einer Funktion und ihre FOURIER-Koeffizienten" zuschreibt. Interessant ist, daß auch KENRICK von der Vorstellung ausgeht, daß für genügend lange Signalausschnitte die Einhüllende der beliebig eng benachbarten Spektrallinien des Periodogramms "nahezu schwankungsfrei" ist und somit das Leistungsdichtespektrum liefert. Warum er trotzdem den Umweg über das integrierte Spektrum wählt, begründet KENRICK zum einen mit der Schwierigkeit, die spektrale Leistungsdichte direkt aus einer FOURIER-Reihenzerlegung zu berechnen, und zum anderen damit, daß diese Methode eigentlich gar nicht für die Analyse von Vorgängen geeignet ist, die für beliebig große Zeiten definiert sind, auch wenn sie nur in einem endlichen Zeitintervall gemessen werden können! Unter der Voraussetzung, daß die reelle Funktion $x(t)$ einen endlichen quadratischen Mittelwert besitzt, zeigt KENRICK, daß sich das integrierte Leistungsdichtespektrum

$$V_X(f) = \int_0^F S_X(u) du$$

in der Form¹⁾

$$V_X(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\sin 2\pi f \tau}{\tau} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt \right] d\tau$$

darstellen läßt. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist eine mögliche Definition für die Autokorrelationsfunktion des Signals $x(t)$. Damit wird zum ersten Mal, gewissermaßen im Vorgriff auf die "Verallgemeinerte Harmonische Analyse" von N. WIENER, 1930 / 88 /, eine spektrale Kenngröße über eine geeignete Transformation aus der Autokorrelationsfunktion gewonnen.

1) *Integrale ohne Angabe der Integrationsgrenzen erstrecken sich von $-\infty$ nach $+\infty$; entsprechendes gilt auch, wenn nur die untere oder obere Grenze nicht endlich ist.*

WIENER behandelt dieses Problem in aller mathematischer Strenge, aber auch mit erheblichem Aufwand für den allgemeinen Fall komplexer Signale $y(t)$, für die nur gefordert wird, daß die Autokorrelationsfunktion

$$r_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t+\tau) \overline{y(t)} dt$$

existiert. Der Querstrich bezeichnet dabei die zu $y(t)$ konjugiert-komplexe Funktion. Von dieser Voraussetzung ausgehend definiert WIENER

$$V_y(f) = \frac{1}{2\pi} \int r_y(\tau) \frac{e^{j2\pi f\tau} - 1}{j\tau} d\tau$$

als das (integrierte) Spektrum von $y(t)$ und beweist auch die Gültigkeit der Umkehrrelation ¹⁾

$$r_y(\tau) = \int e^{-j2\pi f\tau} dV_y(f).$$

Es sei darauf hingewiesen, daß sich die erste Beziehung für den Fall reeller Signale in die von KENRICK angegebene Form überführen läßt.

Neben dem Spektrum führt WIENER auch formal die spektrale Leistungsdichte als Ableitung des stetigen Teils des Spektrums ein:

$$S_y(f) = \frac{dV_c(f)}{df} = \int r_c(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau,$$

ohne aber konkret mit dieser Kenngröße zu arbeiten.

Der Tenor der "Verallgemeinerten harmonischen Analyse" liegt zweifelsohne auf der Behandlung einzelner Signale. Die Querverbindung zu den stochastischen Prozessen wird hergestellt, indem WIENER zeigt, daß und wie die verallgemeinerte harmonische Analyse auf den Fall eines "unendlichen" Ensembles von stochastischen Signalen übertragen werden kann. Auf diese Problematik wird später noch einmal eingegangen.

1) Abweichend von dieser Darstellung wird im folgenden die heute allgemein übliche umgekehrte Vorzeichenwahl in den Transformationskernen verwendet, wie es im übrigen WIENER, 1949 / 89 /, in einer späteren Arbeit auch getan hat.

Die theoretischen Grundlagen und die mathematische Definition des stochastischen Prozesses gehen auf A.N. KOLMOGOROV, 1933 /71 /, zurück. Daran anschließend hat A.J. KHINTCHINE, 1934 /69 /, die Klasse der stationären Prozesse eingeführt und untersucht. In seiner deutschsprachigen Arbeit mit dem Titel "Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse" zeigt KHINTCHINE, daß die Autokorrelationsfunktion eines stetigen stationären Prozesses positiv semidefinit ist und deshalb nach einem Satz von S. BOCHNER, 1932 / 6 /, in der Form

$$r(\tau) = \int e^{j2\pi f\tau} dV(f)$$

dargestellt werden kann, wobei $V(f)$ eine nicht abnehmende (Spektral-)Verteilungsfunktion ist. Diese Beziehung stimmt bis auf das Vorzeichen im Exponenten - vgl. dazu die Fußnote auf Seite 15 - mit der entsprechenden Formel von WIENER überein und wird deshalb WIENER-KHINTCHINE-Relation genannt.

Trotz der formalen Übereinstimmung muß jedoch ein grundsätzlicher Unterschied beachtet werden. Während $r(\tau)$ und $V(f)$ in der Beziehung von KHINTCHINE Prozeßkenngrößen sind, gilt WIENERS Formel zunächst nur für einen individuellen Vertreter des Ensembles und der Übergang zu den Kenngrößen dieses Ensembles muß gesondert über eine geeignete Mittelwert-Bildung vollzogen werden. Bedeutende Beispiele für diese "Ensemble-Statistik" sind in der bekannten Arbeit "Mathematical Analysis of Random Noise" von S.O. RICE, 1945 /74 /, und in dem speziell auf regelungstechnische Anwendungen ausgerichteten Beitrag von H.M. JAMES, N.B. NICHOLS und R.S. PHILLIPS, 1947 /66 /, enthalten.

Demgegenüber hat sich zunächst schwerpunktmäßig in Europa eine Entwicklung vollzogen, die sich enger an die wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften der stochastischen Prozesse anlehnt.

Hier soll an erster Stelle die schon zitierte Arbeit von H. WOLD, 1938 /41 /, "A Study in the Analysis of Stationary Time Series" genannt werden, in der die entscheidende Verbindung zwischen dem beobachteten stochastischen Signal und dem Prozeß dadurch hergestellt wird, daß das gemessene Signal als Realisierung oder Musterfunktion dieses Prozesses interpretiert wird. Bei der Analyse eines Meßsignals geht es dann nicht mehr darum, Kenngrößen dieses Signals zu ermitteln, sondern die statistischen Gesetzmäßigkeiten des unterlegten stochastischen Prozesses aus den Meßdaten abzuleiten.

Ausgehend von der WIENER-KHINTCHINE-Relation hat H. CRAMÉR, 1942 / 59 /, eine entsprechende Spektraldarstellung für den Prozeß selbst angegeben:

$$x(t,e) = \int e^{j2\pi ft} dX(f,e);$$

dabei ist $X(f,e)$ ebenfalls ein stochastischer Prozeß und das Integral ist als Grenzwert im quadratischen Mittel definiert. Auf die hier gewählte Kennzeichnung der Prozesse als Funktion von zwei Veränderlichen wird im nächsten Kapitel ausführlich eingegangen.

Nach dem 2. Weltkrieg - wahrscheinlich schon in dessen Verlauf - verlagert sich das Interesse wieder stärker auf anwendungsorientierte Problemstellungen, wobei zunächst offensichtlich die sogenannten Korrelationsverfahren im Vordergrund stehen. Als Beispiel für diese Entwicklung sei ein 1946 in England durchgeführtes Symposium über Korrelationstechniken stochastischer Signale erwähnt. Bemerkenswert ist dabei ein Diskussionsbeitrag von P.J. DANIELL, 1946 / 60 /, in dem zum ersten Mal ein Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte als diskrete FOURIER-Transformierte der gemessenen Autokorrelationsfolge

$$\hat{r}_N(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1-k} x(n\Delta t)x((n+k)\Delta t)$$

vorgeschlagen und diskutiert wird:

$$\hat{S}_N(f_n) = \Delta t \left[\frac{1}{2} \hat{r}_N(0) + \sum_{0}^{N-1} \hat{r}_N(k\Delta t) \cos 2\pi f_n k\Delta t \right],$$

$$f_n = \frac{n}{N\Delta t}, \quad |n| = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, N \text{ ungerade}.$$

DANIELL verwendet in der Definition der Autokorrelationsfunktion den Vorfaktor $1/(N-k)$ und erhält deshalb in dem Ausdruck für $\hat{S}_N(f)$ unter der Summe zusätzlich den Term $(1-k/N)$. Es ist unmittelbar einsichtig, daß beide Darstellungen gleichwertig sind, vgl. dazu auch die Ausführungen zu Gl.(8.13) in Punkt 9.3.1.

Unter der Voraussetzung normalverteilter Meßwerte und hinreichend kleiner Abtastintervalle wird gezeigt, daß die Varianz von $\hat{S}_N(f_n)$ immer größer ist

als das Quadrat des wahren Wertes $S(f_n)$, daß aber die Kovarianz zweier benachbarter Schätzwerte mit $1/N$ abnimmt. DANIELL folgert daraus, daß durch eine Frequenzmittelung über benachbarte Werte die Varianz von $\hat{S}_N(f_n)$ wesentlich verkleinert werden kann.

Den so gewonnenen Schätzwert bezeichnet D.G. KENDALL, 1948 / 67 /, in einer kurzen Buchbesprechung als "geglättetes (smoothed) Periodogramm", weil $\hat{S}_N(f_n)$ - wie sich leicht zeigen läßt - nichts anderes als das Periodogramm $I_N(f_n)$ ist, und er weist gleichzeitig darauf hin, daß dieses "geglättete" Periodogramm im wesentlichen nur von den ersten Werten ($k = 0, 1, 2, \dots, M \ll N$) der gemessenen Korrelationsfunktion

$$\hat{r}_N(k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1-k} x(n\Delta t)x(n\Delta t + k\Delta t)$$

abhängt.

Im Prinzip hat KENDALL damit den Zusammenhang zwischen den Leistungsdichteschätzungen auf Grund "geglätteter Periodogramme" einerseits und den Schätzwerten auf Grund "gewichteter" Korrelationsfunktionen andererseits erkannt, bevor diese überhaupt eingeführt worden sind.

Die ersten Vorschläge für Spektralschätzwerte auf der Grundlage von "gewichteten" Schätzwerten der Korrelationsfunktion stammen von M.S. BARTLETT, 1948 /115/. Auf Grund der Feststellung, daß die Mittelung über K Periodogramme $I_M(f, k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, aus benachbarten Signalabschnitten der Länge $M = N/K$ ungefähr dem "Abschneiden" der geschätzten Korrelationsfunktion $\hat{r}_N(n\Delta t)$ bei $n = M$ entspricht, das heißt:

$$\frac{1}{K} \sum_{1}^{K} I_M(f, k) \approx \Delta t \sum_{1-M}^{M-1} \hat{r}_N(n\Delta t) \cos 2\pi f n \Delta t,$$

schlägt BARTLETT die rechte Seite dieser "Gleichung" als Schätzwert für die Leistungsdichte vor. Gleichzeitig folgert er auf Grund der linken Seite, daß die Streuung dieses Schätzwertes im Vergleich zum Periodogramm $I_N(f)$ des Gesamtsignals ungefähr um den Faktor $\sqrt{N/M} = \sqrt{K}$ verringert wird.

In einem späteren Beitrag modifiziert BARTLETT, 1950 /116/, diesen Schätzwert in

$$S_N(f) \approx \Delta t \sum_{1-M}^{M-1} \left(1 - \frac{|n|}{M}\right) \hat{r}_N(n\Delta t) \cos 2\pi f n \Delta t$$

und verwendet diese Form u.a., um in den WOLFERSchen Zahlen der Sonnenflecken eine mittlere Periodizität von ungefähr 11 Jahren nachzuweisen¹⁾.

Es soll darauf hingewiesen werden, daß die Bezeichnung "geglättete Periodogramme" für diese Schätzwerte insofern irreführend ist, als damit nicht die Vorgehensweise zur Berechnung charakterisiert wird, sondern vielmehr die Hintergründe, welche auf diesen Typ von Schätzwert geführt haben. Die Gewinnung von Leistungsdichteschätzwerten über die "Glättung" von Periodogrammen setzt eigentlich erst nach der Einführung der "Schnellen-FOURIER-Transformation" (FFT) durch J.W. COOLEY und J.W. TUKEY, 1965 /267/, ein. Es sei in diesem Zusammenhang eine interessante Arbeit von R.H. JONES, 1965 /130/, erwähnt, in der noch unbeeinflußt vom Bekanntwerden des FFT-Algorithmus auf die Vorteile von Spektralschätzwerten auf der Grundlage des Periodogramms hingewiesen wird.

Etwas zur gleichen Zeit wie BARTLETT hat TUKEY, 1949 /142/, einen anderen Vorschlag zur Berechnung von diskreten Schätzwerten für die spektrale Leistungsdichte gemacht. Dabei werden, ausgehend von N Meßwerten, zunächst ebenfalls M Schätzwerte für die Autokorrelationsfunktion berechnet, wobei M deutlich kleiner als N gewählt wird, und einer diskreten Cosinus-Transformation unterworfen. Der so gewonnene "grobe" Schätzwert wird anschließend durch eine Frequenzmittelung über benachbarte Werte mit den Gewichten 0,23, 0,54, 0,23 geglättet. Diese Vorgehensweise stellt offensichtlich eine Verallgemeinerung der von DANIELL, 1946 /60/, vorgeschlagenen Frequenzmittelung dar. In einem späteren Beitrag gibt TUKEY, 1967 /145/, unumwunden zu, daß dieses Verfahren von ihm und R. HAMMING rein zufällig entstanden ist.

TUKEYs Arbeiten, die in den USA offensichtlich auf fruchtbareren Boden gefallen sind als die kurz zuvor erschienenen Beiträge von BARTLETT in Europa, stellen ohne Zweifel einen Wendepunkt auf dem Gebiet der meßtechnischen Analyse stochastischer Signale bzw. Prozesse dar. Bis dahin wurde vornehmlich mit Korrelationsmethoden gearbeitet; über die Messung der spektralen Leistungsdichte gibt es praktisch keine Literatur. So kann die Frage, ob die auf T. DES COUDRES, 1898 /61/, M. GRÖTZMACHER, 1927 /65/, und H. SALINGER, 1929 /75/, zurückgehende sogenannte Suchtonalyse in modifizierter

1) Vgl. dazu die Anmerkungen zu YULE auf Seite 12.

Form auch für die Messung von Leistungsdichtespektren bis zu diesem Zeitpunkt eingesetzt worden ist, nicht beantwortet werden. Eine Beschreibung des Verfahrens konnte zum ersten Mal in einer Arbeit aus dem Jahre 1951 von W.B. DAVENPORT, R.A. JOHNSON & D. MIDDLETON, / 97 /, gefunden werden. In der Folgezeit sind zahlreiche Arbeiten über den Entwurf und die Verwendung von analogen Spektralanalysatoren erschienen, von denen hier nur der Beitrag von J.S. BENDAT & A.G. PIERSON, 1964 / 94 /, erwähnt werden soll.

Es ist interessant festzustellen, daß die analogen Schätzverfahren im gleichen Zeitraum an Bedeutung gewinnen, in dem die digitalen Methoden, ausgehend von TUKEYs Vorschlägen und unterstützt durch die parallel verlaufende Entwicklung der Digitalrechner, ihren "Siegeszug antreten".

Zu den grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiet der digitalen Spektralschätzverfahren muß auch der Beitrag von U. GRENANDER, 1951 / 123 /, gezählt werden. Ausgehend von der Tatsache, daß bei endlicher Signallänge N die Schätzwerte $\hat{r}_N(n\Delta t)$ der Korrelationsfunktion mit wachsendem n von immer weniger Meßwerten gebildet werden, erscheint es ihm "natürlich", in die Transformation gewisse Bewertungsfaktoren $w(n,f)$ einzuführen:

$$\hat{S}_N(f) = \Delta t \sum w(n,f) \hat{r}_N(n\Delta t) e^{-j2\pi f n \Delta t}$$

und diese dann so zu bestimmen, daß $\hat{S}_N(f)$ ein "guter" Schätzwert für die Leistungsdichte wird. Dazu gehört nach GRENANDER vor allem, daß $\hat{S}_N(f)$ nicht negativ wird, eine Forderung, die auch von später eingeführten Schätzwerten dieser Klasse nicht immer erfüllt wird.

GRENANDER zeigt, daß unter gewissen Einschränkungen bzgl. w diese Schätzwerte in der Form

$$\hat{S}_N(f) = \int_{-1/2\Delta t}^{1/2\Delta t} I_N(u) W(f-u) du$$

dargestellt werden können, wobei W über die FOURIER-Transformation mit w verbunden ist. Darüber hinaus gibt er Abschätzungen für den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{S}_N(f)$ an. In einer Monographie von GRENANDER & M. ROSENBLATT, 1957 / 17 /, sind die Ergebnisse von weiteren vornehmlich mathematisch ausgerichteten Untersuchungen zusammengestellt.

Dagegen ist das im Rahmen der modernen Spektralschätzverfahren wohl am häufigsten zitierte Buch "The Measurement of Power Spectra" von R.B. BLACKMAN und TUKEY, 1958 / 118 /, ausgesprochen anwendungsorientiert. Es stellt

nicht nur eine umfassende Bestandsaufnahme der damals bekannten Schätzverfahren einschließlich der theoretischen Grundlagen dar, wozu angemerkt werden muß, daß einige Darstellungen - z.B. was die Definition der spektralen Leistungsdichte anbetrifft - irreführend sind ¹⁾, sondern enthält darüber hinaus eine Fülle von grundsätzlichen Gedanken und Hinweisen zur Spektralanalyse, deren praktische Relevanz zum Teil erst später mit der Bereitstellung entsprechender Rechenmöglichkeiten deutlich geworden ist. Einen gewissen Schwerpunkt dieses Buches bilden die Untersuchungen zur praktischen Durchführung und Planung von Spektrumsschätzungen.

Der Entwurf von Spektralanalysen auf Grund vorgegebener Grenzen für die statistischen Fehler wird in einer abgewandelten Form auch von E. PARZEN, 1957 /134/ behandelt, der in diesem Zusammenhang verschiedene Gütemaße für die Beurteilung von Schätzwerten und für die Suche von optimalen Bewertungsfunktionen $w_N(n)$ untersucht.

Aus der Fülle der in der Folgezeit erschienenen Beiträge zu der "indirekten", d.h. über gewichtete Kovarianzschätzwerte gehenden Methode zur Messung der spektralen Leistungsdichte seien hier nur drei erwähnt. Zum einen ist dies ein Aufsatz von TUKEY, 1959 /143/, der eine ausführliche Bibliographie über Anwendungen in nicht ingenieurwissenschaftlichen Bereichen wie Aerodynamik, Astronomie, Meteorologie und Ozeanographie enthält; zum anderen handelt es sich um zwei Arbeiten von PARZEN, 1961 /136/, und JENKINS, 1961 /127/, die zusammen mit sehr ausführlichen Diskussionsbeiträgen von TUKEY, 1961 /144/, und N.R. GOODMAN, 1961 /122/, in einem Heft der Zeitschrift Technometrics erschienen sind und einen umfassenden Überblick über den Stand der digitalen Spektralschätzverfahren im Jahre 1961 geben.

In seinem Diskussionsbeitrag wird von TUKEY die sogenannte "komplexe Demodulation" angesprochen, worunter man die Multiplikation eines Signals mit der harmonischen Exponentiellen einer bestimmten Frequenz versteht. Die Verwendung der "komplexen Demodulation" als Grundlage für ein direktes, nicht über die Messung der Kovarianzfunktion laufendes, Verfahren zur Schätzung der Leistungsdichte wird im Prinzip bereits von BLACKMAN und TUKEY, 1958 /118/, vorgeschlagen, aber mit dem Hinweis, daß die "indirekte" Methode einfacher sei, sofort wieder verworfen. Dieses "direkte" Schätz-

1) Es sei in diesem Zusammenhang auch auf die Kritiken von G.M. JENKINS, 1961 /127/, und M.B. PRIESTLEY, 1962 /139/, hingewiesen.

verfahren, das im wesentlichen einer digitalen Suchtonanalyse entspricht, wird von P.D. WELCH, 1961 /295/, aufgegriffen und ausführlich dargestellt. Es hat aber, abgesehen von einigen Anwendungen im Bereich der Ökonomie, z.B. M.D. GODFREY, 1965 /270/, merkwürdigerweise keine weitere Bedeutung erlangt; als Grund dafür kann vielleicht die vorübergehende Fixierung auf die "indirekte" Methode als die einzig praktikable angesehen werden. Dabei resultiert diese Einschätzung vornehmlich aus Wirtschaftlichkeitsüberlegungen hinsichtlich der benötigten Rechenzeit, denn ohne geeignete Rechenhilfsmittel ist es natürlich wirtschaftlicher, aus einem Signal der Länge N nur etwa $M = N/10$ Schätzwerte der Kovarianzfunktion zu berechnen und der FOURIER-Transformation zu unterwerfen, als alle FOURIER-Koeffizienten zu berechnen.

Diese Überlegung wird mit der Einführung oder eigentlich Wiederentdeckung¹⁾ der "Schnellen-Fourier-Transformation" durch J.W. COOLEY und TUKEY, 1965 /267/, grundlegend verändert.

Es zeigt sich, daß der rechentechnisch schnellste Weg, einen Schätzwert $\hat{C}(k \Delta t)$ der Kovarianzfolge zu gewinnen, ggf. darin besteht, über die FFT alle FOURIER-Koeffizienten und daraus das Periodogramm $I_N(\cdot)$ zu berechnen, um schließlich $\hat{C}(k \Delta t)$ über eine schnelle Rücktransformation zu erhalten. Damit ist der Umweg über gewichtete Kovarianzschätzwerte bei der Berechnung von Leistungsdichtespektren nicht mehr unbedingt sinnvoll oder gar notwendig, denn nachdem das Periodogramm ohnehin berechnet wird, drängen sich die auf DANIELL, 1946 /60/, und BARTLETT, 1948 /115/, zurückgehenden "geglätteten" Periodogramme als Schätzwerte geradezu auf.

Vor diesem Hintergrund hat WELCH, 1967 /158/, ein Schätzverfahren auf der Grundlage von sogenannten modifizierten Periodogrammen angegeben. Dabei wird das Meßsignal $x(n\Delta t)$, $n=0,1,\dots,N-1$, in K Segmente der Länge L aufgeteilt, die sich auch überlappen dürfen, und daraus mit Hilfe der FFT die modifizierten Periodogramme

$$I_L(f_1, k) = \frac{1}{L} \left| \sum x(n\Delta t) d_L(n, k) e^{-j2\pi f_1 n\Delta t} \right|^2, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

berechnet, wobei $d_L(n, k)$ geeignete Datengewichtungen sind, durch die auch die Lage der Segmente festgelegt ist. Als Schätzwert für die Leistungsdichte

1) vgl. dazu J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS und P.D. WELCH, 1967 /266/:

Historical Notes on the Fast Fourier Transform.

wird der lineare Mittelwert

$$\hat{S}_N(f_1) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tilde{I}_L(f_1, k)$$

verwendet. Dieses im Englischen als "weighted overlapped segment averaging method" (WOSA) bezeichnete Schätzverfahren hat aufgrund von rechentechnischen Vorzügen in jüngerer Zeit stark an Bedeutung gewonnen, z.B. G.C. CARTER & A.H. NUTTALL, 1980 /151/, wobei eine anhaltende Diskussion über die Frage entflammt ist, welche Vor- und Nachteile mit der Verwendung von Datengewichten verbunden sind, vgl. C.K. YUEN, 1979 /149/ und D.R. BRILLINGER, 1981 /165/.

Eine Gegenüberstellung der verschiedenen digitalen Spektralschätzverfahren unter Berücksichtigung des FFT-Algorithmus¹ findet sich in einem Übersichtsbeitrag von PARZEN, 1968 /138/.

Es ist interessant festzustellen, daß im Zusammenhang mit dieser "Bestandsaufnahme" eine völlig neue Klasse, nämlich die Autoregressiven (AR-)Schätzwerte für die spektrale Leistungsdichte vorgeschlagen wird. Die Grundlage für diese Verfahren ist ein autoregressives Modell

$$x(n,e) = -a_1 x(n-1,e) - \dots - a_K x(n-K,e) + w(n,e)$$

für den unterlegten Prozeß, wie es 1927 von YULE /91/ eingeführt worden ist. Bei vorgegebener Modellordnung N, können die Parameter a_k , $k=1, 2, \dots, K$, durch Anpassung des Modells an die Meßdaten auf der Grundlage der minimalen Fehlerquadrate bestimmt werden. Das führt auf die Lösung der YULE-WALKER-Gleichungen, vgl. S. 13.

Als AR-Schätzwert für die Leistungsdichte erhält man dann

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\Delta t \hat{\sigma}_w^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k e^{-j2\pi f k \Delta t} \right|^2}$$

Wie A. van den BOS, 1971 /207/, gezeigt hat, entspricht dieses Schätzverfahren der sogenannten "Maximum-Entropie-(ME-)Methode, die von J.P. BURG, 1967 /183/, 1968 /184/, aufgrund vollkommen anderer Überlegungen eingeführt worden ist. BURG geht dabei von der Feststellung aus, daß bei den bestehenden digitalen Schätzverfahren sowohl über die benötigten Daten-, Kovarianz- oder Spektralfenster als auch durch die in der Verwendung der

diskreten FOURIER-Transformation implizit enthaltenen Annahme, daß sich die Meßdaten periodisch fortsetzen, zusätzliche Information in den Schätzwert einfließt, für die es auf Grund der vorhandenen Meßwerte eigentlich keine Rechtfertigung gibt. Als Alternative schlägt BURG deshalb einen Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte vor, der einerseits mit den unverfälscht aus den Daten gewonnenen Schätzwerten für die Kovarianzfolge verträglich ist und andererseits keinerlei zusätzliche Information mit sich bringt. Das bedeutet im informationstheoretischen Sinn, daß der Schätzwert $\hat{S}_x(f)$ so gewählt werden muß, daß die Informationsentropie des unterlegten stochastischen Prozesses maximal wird.

Für einen bandbegrenzten GAUSSverteilten Prozeß ist die Entropiedichte proportional zu

$$\int_{-f_g}^{f_g} \ln S_x(f) df,$$

wobei f_g die Grenzfrequenz des Dichtespektrums $S_x(f)$ ist. Der ME-Schätzwert für $S_x(f)$ ergibt sich damit als Lösung einer Variationsaufgabe mit Nebenbedingungen, nämlich der Maximierung des obigen Integrals unter Berücksichtigung, daß für die gemessenen Werte der Kovarianzfolge die WIENER-KHINTCHINE-Beziehung

$$\int_{-f_g}^{f_g} S_x(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \hat{c}_x(k; \Delta t) \quad , k = 0, 1, \dots, M$$

erfüllt sein soll. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf den Schätzwert

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\Delta t q_M}{\left| 1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-j2\pi f k \Delta t} \right|^2}$$

wobei die a_k , $k=1,2,\dots,M$, die Koeffizienten eines diskreten WIENERSchen Prädiktionsfilters der Ordnung M und q_M der quadratische Mittelwert des Vorhersagefehlers dieses Filters sind. BURG, 1968 /184/, benutzt diese Eigenschaft für die Entwicklung eines nach ihm benannten rekursiven Verfahrens zur Berechnung der Filterkoeffizienten. Darüber hinaus fließen verschiedene Methoden und Algorithmen der Linearen Prädiktion, wie sie vor allem in der digitalen Sprachverarbeitung verwendet werden, in die Schätzverfahren von Leistungsdichtespektren ein. In diesem Zusammenhang sollen nur zwei Beiträge von J. MAKHOUL, 1975 /280/ und 1977 /281/ genannt werden.

Die Arbeiten von BURG und PARZEN bilden den Ausgangspunkt für eine deutliche Verlagerung der Aktivitäten - sowohl was die Entwicklung neuer Verfahren als auch deren Anwendung anbelangt - von den bekannten Schätzungen auf Grund gewichteter Kovarianzfolgen oder geglätteter Periodogramme zu den sogenannten parametrischen Schätzverfahren. Dazu zählen neben den AR- bzw. ME- die sogenannten ARMA- Verfahren, die von einem gemischten "autoregressiven - moving - average - Modell"

$$x(n,e) = \sum_{k=1}^K a_k x(n-k,e) + w(n,e) + \sum_{l=1}^L b_l w(n-l,e)$$

für den unterlegten diskreten Prozeß ausgehen und auf einen Schätzwert für die Leistungsdichte in der Form

$$\hat{S}_x(f) = \Delta t \hat{S}_w \left| \frac{1 + \sum_{l=1}^L \hat{b}_l e^{-j2\pi f l \Delta t}}{1 + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k e^{-j2\pi f k \Delta t}} \right|^2$$

führen, und ein mißverständlich als Maximum-Likelihood- (ML-) bezeichnetes Verfahren von J. CAPON, 1969 /239/. Es soll an dieser Stelle darauf verzichtet werden, einzelne Methoden zur Bestimmung der Parameter von ARMA-Modellen herauszustellen, stattdessen sei auf die Übersichtsbeiträge von A. MORF, D.T. LEE, J.R. NICKOLLS & A. VIEIRA, 1977 /259/ und T.J. ULRICH & M. OOE, 1979 /206/, hingewiesen.

Die sogenannte ML-Methode von J. CAPON, 1969 /239/, ist ursprünglich zur Berechnung von Wellenzahl-Spektren seismischer Signale auf Grund von Messungen mit örtlich verteilten Sensoren entwickelt worden. Für den Fall eindimensionaler Zeitsignale führt dieses Verfahren, wie R.T. LACOSS, 1971 /254/, gezeigt hat, auf einen Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte in der Form

$$\hat{S}_x(f) = \frac{M \Delta t}{\underline{\underline{\hat{C}}}_M^{-1} \underline{\underline{\hat{C}}}_M} ,$$

wobei

$$\underline{\underline{\hat{C}}}_M = [1, e^{j2\pi f \Delta t}, \dots, e^{j2\pi (M-1) f \Delta t}]^T$$

bzw. $\underline{\underline{\hat{C}}}_M$ die dazu konjugiert-komplexe Form bedeuten und $\hat{C}_M^{-1}$ die Inverse einer

aus den Meßdaten geschätzten $M \times M$ -Kovarianzmatrix ist. Dieses Verfahren entspricht im Prinzip einer Messung der Ausgangsleistung von Schmalbandfiltern mit der Mittenfrequenz f und variabler Bandbreite, die sich in Abhängigkeit von den Daten selbsttätig so einstellt, daß die betrachtete Frequenzkomponente bei f unverfälscht durchgelassen und gleichzeitig die Varianz am Ausgang des Filters minimal wird.

Wie BURG, 1972 /234/, gezeigt hat, besteht zwischen den ML- und den ME- bzw. AR-Schätzwerten ein enger Zusammenhang.

Ein bedeutendes Problem beim Einsatz parametrischer Schätzverfahren ist neben der Effizienz des verwendeten Algorithmus' die Bestimmung der optimalen Modellordnung des unterlegten AR- bzw. ARMA-Prozesses. In der bereits erwähnten Arbeit von PARZEN, 1968 /138/, wird vorgeschlagen, die Ordnung des AR-Modells anhand des Verlaufs der gemessenen kovarianzfolge vorab festzulegen; "objektive" Kriterien sind in der Folgezeit von H. AKAIKE, 1969 /208/ und 1974 /211/ sowie PARZEN, 1976 /225/ und MARPLE, 1980 /199/ eingeführt worden. Diese Kriterien basieren im wesentlichen auf der Berechnung geeigneter Fehlermaße und werden nach jedem Schritt des Algorithmus' zur Bestimmung der Modellparameter überprüft. Wenn die optimale Ordnung gefunden worden ist, wird die Iteration abgebrochen und der zuletzt berechnete Satz von Parametern dem AR- oder ARMA-Schätzwert für die Leistungsdichte zugrunde gelegt.

Die mit den Arbeiten von BURG und PARZEN Ende der 60er Jahre eingeleitete Entwicklungsphase der parametrischen Schätzverfahren für die spektrale Leistungsdichte scheint nunmehr - zumindest was die Maximum-Entropie bzw. AR-Verfahren anbetrifft - zu einem gewissen Abschluß gelangt zu sein.

Das und die Bedeutung dieser Verfahren wird daraus ersichtlich, daß in den letzten Jahren neben verschiedenen Übersichtsbeiträgen, z.B. von A. PAPOULIS, 1981 /201/ und S.M. KAY & S.L. MARPLE, 1981 /50/, drei Anthologien /46, 48, 49/ zu diesem Themenkreis erschienen sind.

II Grundlagen und Darstellung stationärer stochastischer Prozesse im Frequenzbereich

Die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung befaßt sich mit Experimenten oder Beobachtungen, die viele Male unter möglichst gleichbleibenden Bedingungen wiederholt werden können, wobei die Ergebnisse nicht vorhersagbar sind, sondern vielmehr von zufälligen Einflüssen bestimmt werden. Für die analytische Behandlung derartiger Zufallserscheinungen ordnet man den zu untersuchenden Größen in Abhängigkeit vom jeweiligen Ergebnis Zahlenwerte zu und interpretiert diese Zufallszahlen als Realisierungen einer Zufallsvariablen.

Darüber hinaus treten in vielen Bereichen, wie z.B. in der Astronomie, Meteorologie, Ozeanographie, Ökonomie, Aerodynamik, Geophysik, Nachrichten- und Regelungstechnik, Fälle auf, in denen die Beobachtung eines Phänomens nicht durch eine Zufallszahl sondern vielmehr durch eine Zufallsfunktion, etwa ein Zeitsignal mit zufälligen Amplitudenwerten, beschrieben werden muß.

Die Entstehung oder Erzeugung solcher Vorgänge, die nur auf Grund von Wahrscheinlichkeitsaussagen gekennzeichnet werden können, nennt man einen zufälligen oder stochastischen Prozeß.

Die analytische Behandlung solcher Zufallsprozesse geht über den Rahmen der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung hinaus und erfordert eigene mathematische Verfahren und Methoden, auf die im folgenden insoweit eingegangen wird, wie sie für die spektrale Darstellung bzw. Kennzeichnung von stationären stochastischen Prozessen von Bedeutung sind.

Erwähnt werden soll, daß die ersten wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeiten über Zufallsfunktionen wohl von L. BACHELIER / 53, 54 / stammen und daß die weitere Entwicklung zunächst vornehmlich durch Untersuchungen über die BROWN-sche Molekularbewegung vorangetrieben wird. In diesem Zusammenhang sollen die Beiträge von M. von SMOLUCHOWSKI / 80 /, A. EINSTEIN / 62 / und N. WIENER / 86 / erwähnt werden. Die Grundlagen für eine allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse sind von A.N. KOLMOGOROV / 71 / und A.J. KHINTCHINE / 69 / geschaffen worden, wobei die mit der mathematischen Definition eines stochastischen Prozesses 1933 von KOLMOGOROV eingeleitete Entwicklung in den 50er Jahren einen gewissen Abschluß gefunden hat, als eine Reihe von zusammenfassenden Werken entstanden ist, von denen hier nur das bekannte Buch "Stochastic Processes" von J.L. DOOB / 14 / genannt werden soll.

Den Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen bildet die spektrale Kennzeichnung von kontinuierlichen und diskreten Parameterprozessen, wobei verschiedene Definitionen des Leistungsdichtespektrums angegeben werden, die als Grundlage für die analogen und digitalen Schätzverfahren dienen.

Im Hinblick auf die parametrischen Schätzverfahren werden außerdem Modelle für diskrete Parameterprozesse dargestellt.

Den Abschluß bilden einige Betrachtungen über die Erzeugung diskreter Parameterprozesse durch Abtastung kontinuierlicher Prozesse.

4. Kennzeichnung und Eigenschaften stochastischer Prozesse

Bei der verbalen Einführung der Begriffe Zufallsvariable und stochastischer Prozeß zu Beginn dieses Kapitels ist gesagt worden, daß es für wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen sinnvoll ist, von einem Experiment auszugehen, das viele Male unter gleichbleibenden Bedingungen (zumindest gedanklich) wiederholt werden kann. Die Menge aller möglichen Ergebnisse e eines solchen Zufallsexperimentes wird Merkmals- oder Ergebnismenge $\mathcal{E}$ genannt und bildet zusammen mit dem Ereignisfeld und der darauf definierten Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}$ das grundlegende Konzept für die mathematische Behandlung von Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen.

Falls die Ergebnismenge $\mathcal{E}$ nicht abzählbar ist, z.B. weil die Ergebnisse eines Zufallsexperiments Punkte aus einem Kontinuum sind, müßte man diesen Ergebnissen die Auftrittswahrscheinlichkeit Null zuordnen. Dann wäre aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ergebnis in ein von Null verschiedenes Intervall fällt, ebenfalls gleich Null, so daß dieses Experiment überhaupt nicht mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschrieben werden könnte.

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, wird das Ereignisfeld $\mathcal{B}$ eingeführt, das aus meßbaren Teilmengen von $\mathcal{E}$ besteht, denen eine Wahrscheinlichkeit $\mathcal{W}$ zugeordnet werden kann. Wenn die Ergebnismenge $\mathcal{E}$ abzählbar ist, kann das Ereignisfeld $\mathcal{B}$ beispielsweise aus allen Teilmengen von $\mathcal{E}$ bestehen. In diesem Fall stellt auch ein einzelnes Ergebnis e_j ein Ereignis dar, das dann Elementarereignis genannt wird.

Wenn die Ergebnismenge $\mathcal{E}$ nicht abzählbar ist, lassen sich die Teilmengen, die als Ereignisse bezeichnet werden, z.B. in Form von endlichen oder auch unendlichen Intervallen bilden. Ohne näher auf die mengentheoretischen Eigenschaften des Ereignisfeldes eingehen zu wollen / 19, 31, 33/ sei darauf hingewiesen, daß $\mathcal{B}$ neben einigen frei wählbaren Teilmengen von $\mathcal{E}$ stets die

Ergebnismenge selbst und alle Mengen enthält, die durch die Operationen "Vereinigung", "Durchschnitt" und "Negation" aus den übrigen Elementen von $\mathcal{B}$ entstehen. Dabei bildet die Ergebnismenge $\mathcal{E}$ das "sichere Ereignis", dem die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet wird, und die leere Menge $\emptyset$ das "unmögliche Ereignis" mit der Wahrscheinlichkeit Null.

Bei der Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Methoden auf praktische Probleme wird üblicherweise nicht direkt mit der Ergebnismenge $\mathcal{E}$ gearbeitet, sondern vielmehr mit dem Konzept der Zufallsvariablen.

Eine reelle Zufallsvariable $x(e)$ ist eine eindeutige Abbildung der Ergebnismenge $\mathcal{E}$ eines Zufallsexperimentes auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, wenn die Ungleichung

$$x(e) \leq u$$

ein Ereignis erklärt, d.h. $\{x(e) \leq u\} \in \mathcal{B}$, dessen Wahrscheinlichkeit für alle $u \in \mathbb{R}$ definiert ist. Zusätzlich wird gefordert, daß mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable nur endliche Werte annehmen kann.

Zuweilen ist es sinnvoll, komplexwertige Zufallsvariable $z(e)$ zu betrachten; solche Zufallsvariable sind definiert als

$$z(e) = x(e) + jy(e),$$

wobei $x(e)$ und $y(e)$ reelle Zufallsvariable sind.

Darüberhinaus kann es für manche Anwendungsfälle sinnvoll sein, eine Zufallsvariable als dimensionsbehaftete Größe einzuführen; dann muß natürlich auch die Intervallgrenze u in der Beziehung

$$x(e) \leq u$$

dieselbe Dimension besitzen; ebenso wie z.B. der lineare Mittelwert m_x und die Streuung σ_x^2 dieser Zufallsvariablen.

Ein zufälliger oder stochastischer Prozeß liegt vor, wenn jedem Ergebnis $e \in \mathcal{E}$ nicht nur ein einzelner Zahlenwert sondern vielmehr eine Funktion $x(t)$ eindeutig zugeordnet ist, wobei t ein Element der Index- oder Parametermenge $\mathcal{T}$ ist. Damit ist ein stochastischer Prozeß eine Funktion von zwei Veränderlichen: $x(t, e)$, $t \in \mathcal{T}$, $e \in \mathcal{E}$. Für jedes feste t ist $x(\cdot, e)$ eine Zufallsvariable und für ein festes e ist $x(t, \cdot)$ eine Realisierung oder Musterfunktion des Prozesses.

Ein stochastischer Prozeß $x(t, e)$ kann also entweder als eine durch den Parameter t geordnete Menge von Zufallsvariablen oder als Gesamtheit der Musterfunktionen angesehen werden. Für die vorliegende Arbeit ist es ausreichend, einen stochastischen Prozeß $x(t, e)$ als eine über den Parameter t

geordnete Familie von Zufallsvariablen zu definieren.

Wenn die Zufallsvariablen reell (komplex) sind, wird der Prozeß reell (komplex) genannt. Im allgemeinen werden nur reelle Prozesse behandelt; wenn jedoch, wie bei der Spektralzerlegung eines reellen Zeitprozesses komplexe Prozesse auftreten, so wird darauf besonders hingewiesen.

Obwohl es i.a. nicht üblich ist, die Abhängigkeit der Zufallsvariablen und Prozesse von den Ergebnissen $e \in \mathcal{E}$ explizit anzugeben, wird diese Kennzeichnung im folgenden bewußt beibehalten. Damit wird bei der Darstellung und Bewertung der verschiedenen spektralen Schätzverfahren eine deutliche Unterscheidung zwischen dem konkreten Schätzwert einerseits und der zugrundeliegenden Schätzfunktion andererseits, die entweder eine Zufallsvariable oder ein Prozeß ist, sichergestellt.

Auf Grund der verwendeten Definition ist es einleuchtend, daß ein Prozeß $x(t,e)$ statistisch bestimmt ist, wenn für alle endlichen Folgen $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in \mathcal{T}$ die endlichdimensionale Verbundverteilung

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = W\{x_1 \leq u_1, x_2 \leq u_2, \dots, x_n \leq u_n\}$$

der Zufallsvariablen $x_i \equiv x(t_i, e)$, $i = 1, 2, \dots, n$, bestimmt ist. Äquivalente Beschreibungsmöglichkeiten des Prozesses sind durch die charakteristische Funktion und durch die Verteilungsdichte gegeben. Wenn die Verteilungsdichte als gewöhnliche Ableitung der Verteilungsfunktion existiert, nennt man die Zufallsvariablen $x(t_i, e)$ kontinuierlich und spricht von einem Prozeß mit kontinuierlicher Ergebnismenge. Wenn die Zufallsvariablen nur diskrete Werte annehmen können, so liegt ein Prozeß mit diskreter Ergebnismenge vor. Im folgenden werden nur Prozesse mit kontinuierlicher Ergebnismenge $\mathcal{E}$ betrachtet.

Bei den meisten Anwendungen steht nur ein stochastisches Signal, das nach H. WOLD /41/ als Musterfunktion eines entsprechenden Prozesses interpretiert wird, oder sogar nur ein endlicher Abschnitt einer Musterfunktion zur Verfügung, so daß eine vollständige Charakterisierung des Prozesses in einer der angegebenen Formen i.a. gar nicht möglich ist. Man muß sich dann mit "einfacheren" Kenngrößen zufrieden geben, wie etwa der Kovarianzfunktion oder der spektralen Leistungsdichte, die im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen stehen wird. Dazu ist es notwendig, über die formale Definition des Prozesses $x(t,e)$ als Familie von Zufallsvariablen hinaus, weitere Spezifikationen und Einschränkungen anzugeben.

4.1 Kontinuierliche und diskrete Parameterprozesse

Die Parametermenge $\mathcal{T}$ eines Prozesses $x(t,e)$ wird i.a. als unendlich angenommen. Sie kann z.B. die reelle Linie $[t; -\infty < t < \infty]$ oder auch eine diskrete Menge von Punkten sein $\{t_n; n = \dots -1, 0, 1, 2, \dots\}$; im ersten Fall wird der Prozeß ein kontinuierlicher Parameterprozeß genannt, im anderen Fall spricht man von einem diskreten Parameterprozeß.

Der Parameter t repräsentiert in vielen physikalischen Zusammenhängen die Zeit. Auch im folgenden werden vornehmlich Prozesse betrachtet, deren Parametermenge die Zeitachse oder eine diskrete Untermenge dieser ist. Für den Fall, daß die Zeitpunkte äquidistant sind, wird zur Kennzeichnung der diskreten Parameterprozesse die Schreibweise $x(n,e)$ anstelle von $x(n\Delta t,e)$ verwendet. Falls ein solcher Prozeß durch Abtastung aus einem kontinuierlichen Parameterprozeß gewonnen wird, müssen zwei wesentliche Punkte beachtet werden. Zum einen sind die Spektren abgetasteter Signale bzw. Prozesse periodisch, wobei die Periodendauer von der Abtastfrequenz abhängt. Durch geeignete Wahl der Abtastfrequenz muß sichergestellt werden, daß sich die periodischen Wiederholungen nicht überlappen. Diese Fragen werden im 8. Abschnitt ausführlich behandelt.

Der zweite Punkt betrifft die Auflösung der Analog-Digital-Wandler. Um sicherzustellen, daß auch die durch Abtastung gewonnenen diskreten Parameterprozesse kontinuierlich sind, das heißt durch endlichdimensionale Verbundverteilungsdichten charakterisiert werden können, werden den Betrachtungen ideale Analog-Digital-Wandler, d.h. Wandler mit beliebig feiner Auflösung zugrundegelegt. Der Einfluß von Quantisierungsfehlern bleibt also unberücksichtigt.

4.2 Stationäre Prozesse, Ergodizität

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den Fall kontinuierlicher Parameterprozesse; sie können jedoch in entsprechender Weise auf diskrete Parameterprozesse übertragen werden.

Es sei $y(t,e)$ ein reeller kontinuierlicher Parameterprozeß. Die Funktion

$$m_y(t) = \mathcal{E}y(t,e)$$

wird Mittelwertfunktion des Prozesses genannt, wobei $\mathcal{E}$ der (lineare) Erwartungswertoperator ist. Die Funktion

$$r_y(t_1, t_2) = \mathcal{E}y(t_1,e)y(t_2,e)$$

heißt (Auto-)Korrelationsfunktion und

$$c_y(t_1, t_2) = \mathcal{E}[y(t_1, e) - m_y(t_1)] \cdot [y(t_2, e) - m_y(t_2)] \quad (4.1)$$

ist die (Auto-)Kovarianzfunktion des Prozesses.

Im Hinblick darauf, daß der Begriff "Autokorrelationsfunktion" in der Literatur nicht einheitlich, sondern sowohl für die auf den Nullwert bezogene als auch für die nichtnormierte Funktion verwendet wird, wird im folgenden bevorzugt mit der Kovarianzfunktion gearbeitet.

Der Prozeß $y(t, e)$ heißt stationär im weiteren Sinn oder kovarianzstationär, wenn er endliche Momente 2. Ordnung hat, das heißt

$$\mathcal{E}|y(t, e)|^2 < \infty \text{ für alle } t \in \mathbb{T},$$

und die Kovarianzfunktion nur von der Differenz $t_2 - t_1 = \tau$ abhängt:

$$c_y(t_1, t_2) = c_y(t_2 - t_1) = c_y(\tau) = c_y(-\tau).$$

Außerdem gilt

$$m_y(t) = m_y = \text{const.},$$

und der Prozeß

$$x(t, e) = y(t, e) - m_y \quad (4.2)$$

ist offensichtlich mittelwertfrei und hat dieselbe Kovarianzfunktion wie $y(t, e)$.

Im folgenden werden ausnahmslos kovarianzstationäre Prozesse betrachtet, deren Mittelwert gleich Null ist oder die gemäß Gl.(4.2) reduziert worden sind.

In engem Zusammenhang mit den stationären Prozessen stehen die sogenannten ergodischen Prozesse. Im allgemeinsten Sinn heißt ein Prozeß ergodisch, wenn alle seine statistischen Kenngrößen mit Wahrscheinlichkeit 1 aus einer Musterfunktion bestimmt werden können. Dazu muß natürlich eine strengere Form der Stationarität gefordert werden, nämlich die Invarianz aller statistischen Eigenschaften gegenüber Verschiebungen der Zeit.

Soweit diese Prozeßkenngrößen als Zeitmittelwerte definiert werden können, läßt sich diese Aussage wie folgt abwandeln: Ein Prozeß ist ergodisch, wenn Zeit- und Ensemblemittelwerte (Erwartungswerte) mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich sind.

Wie schon gesagt worden ist, kann und braucht man in den meisten Anwendungen nicht alle Kenngrößen zu bestimmen, sondern nur einige wenige, und man definiert deshalb eine abgeschwächte Form der Ergodizität eines Prozesses bezüglich dieser Kenngrößen.

So heißt ein Prozeß $x(t,e)$ ergodisch bezüglich der Kovarianzfunktion $c_x(\tau)$, wenn der Zeitmittelwert

$$\hat{c}_x(\tau, e) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t, e) x(t + |\tau|, e) dt \quad (4.3)$$

für $T \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1, das heißt für fast jedes e , gegen die Kovarianzfunktion des Prozesses, Gl.(4.1), konvergiert. Strenggenommen bezieht sich die Aussage des Ergodentheorems zunächst auf den "symmetrischen" Zeitmittelwert

$$\tilde{c}_x(\tau, e) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, e) x(t + |\tau|, e) dt.$$

Es muß deshalb zusätzlich gefordert werden, daß beide Mittelwerte für $T \rightarrow \infty$ auf denselben Grenzwert führen; das ist mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt, wenn $x(t,e)$ ergodisch ist / 28, S.58/.

Es ist vergleichsweise einfach, Bedingungen dafür anzugeben, daß ein Prozeß ergodisch bezüglich Mittelwert und Kovarianzfunktion ist / 31, 33 /.

Untersucht man jedoch die verschiedenen als Zeitmittelwerte definierten Schätzfunktionen für die spektrale Leistungsdichte (vgl. Abschnitt 10), so muß man feststellen, daß diese i.a. nicht erwartungstreu sind und daß deshalb die Formulierung einer Ergodizitätsaussage wie oben für die Kovarianzfunktion gar nicht möglich ist.

Es sind auch in der Literatur, abgesehen von einer Ausnahme / 31 /, wo der Hinweis auf die Nichtkonsistenz des Periodogramms mit dem Begriff der Ergodizität gekoppelt wird, keine diesbezüglichen Untersuchungen bekannt.

Das Integral in Gl.(4.3) ist als Grenzwert einer Summe im quadratischen Mittel (i.q.M.) zu interpretieren.

Ein stationärer stochastischer Prozeß $x(t,e)$ heißt i.q.M. RIEMANN-integrierbar im Intervall $[a,b] \in \mathbb{R}$, wenn für

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b,$$

und

$$\Delta t_v = t_{v+1} - t_v, \quad \delta = \max_v \Delta t_v, \quad t_v \leq \tau_v < t_{v+1}$$

der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} E \left[\sum_{v=1}^n x(\tau_v, e) \Delta t_v - \int_a^b x(t, e) dt \right]^2 = 0.$$

In entsprechender Weise wird auch die Ableitung eines Prozesses erklärt, und es soll vereinbart werden, daß alle im folgenden auf stochastische Prozesse angewendeten analytischen Operationen als geeignete Grenzwerte i.q.M. aufzufassen sind.

4.3 GAUSSverteilte stationäre Prozesse

Innerhalb der stationären stochastischen Prozesse nehmen die GAUSS- oder normalverteilten Prozesse eine besondere Stellung ein. Dafür lassen sich i.w. drei Gründe anführen:

i) Zahlreiche physikalische Größen können in guter Näherung als GAUSS-verteilt angesehen werden, besonders wenn sie durch Addition vieler voneinander unabhängiger Beiträge gebildet werden. Dies ist eine Folgerung aus dem Zentralen Grenzwertsatz, der i.w. besagt, daß die Verteilungsfunktion einer Summe von statistisch unabhängigen Zufallsvariablen, deren Verteilungsfunktionen nur gewissen sehr allgemeinen Bedingungen gehorchen müssen, mit wachsender Zahl der Summanden gegen eine GAUSS-Verteilung konvergiert /11/. Ohne näher auf Einzelheiten eingehen zu wollen, sei darauf hingewiesen, daß sich der Zentrale Grenzwertsatz auf die Verteilungsfunktionen bezieht, so daß unter den Summanden auch diskrete Zufallsvariable sein dürfen.

ii) Stochastische Prozesse, die durch lineare Operationen wie z.B. Summation, Integration oder Differentiation aus GAUSSverteilten Prozessen entstehen, sind ebenfalls normalverteilt.

Durch diese Eigenschaft wird die analytische Behandlung linearer dynamischer Systeme mit stochastischen Signalen wesentlich vereinfacht oder überhaupt erst ermöglicht. Aus diesem Grunde müssen auch für die Beurteilung der Spektralschätzwerte, z.B. hinsichtlich ihres Konsistenzverhaltens, GAUSSverteilte Prozesse zugrunde gelegt werden.

iii) Das Wahrscheinlichkeitsgesetz eines GAUSSverteilten Prozesses wird, wie im folgenden gezeigt wird, vollständig durch die ein- und zweidimensionalen Verteilungs-, Verteilungsdichte- bzw. charakteristische Funktionen bestimmt.

Ein stochastischer Prozeß $x(t, \epsilon)$ wird GAUSS- oder normalverteilt genannt, wenn sein Wahrscheinlichkeitsgesetz, das heißt die endlich dimensional Verteilungs-, Verteilungsdichten- oder charakteristischen Funktionen normal sind.

Für die Darstellung dieser Funktionen ist es vorteilhaft, die Zufallsvari-

ablen $x_i(e) \equiv x(t_i, e)$ $t_i \in T$, $i = 1, 2, \dots, N$, in einem Zufallsvektor $\underline{x}(e)$ zusammenzufassen. Entsprechend bezeichnet man mit $\underline{m}_x = \mathcal{E} \underline{x}(e)$ den Mittelwertvektor, der auf Grund der vorausgesetzten Stationarität konstant ist, und die symmetrische $N \times N$ -Matrix

$$\underline{C}_x = \mathcal{E} [\underline{x}(e) - \underline{m}_x] [\underline{x}(e) - \underline{m}_x]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & c_x(t_2 - t_1) & \dots & c_x(t_N - t_1) \\ c_x(t_2 - t_1) & \sigma_x^2 & \dots & c_x(t_N - t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x(t_N - t_1) & c_x(t_N - t_2) & \dots & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

wird Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $\underline{x}(e)$ oder auch N-dimensionale Kovarianzmatrix des Prozesses $x(t, e)$ genannt. Sie ist positiv semidefinit, das heißt

$$\underline{y}^T \underline{C}_x \underline{y} \geq 0,$$

und für die Determinante gilt

$$\det \underline{C}_x = \prod_{i=1}^N \lambda_i \geq 0, \quad (4.5)$$

wobei mit λ_i die stets reellen und nichtnegativen Eigenwerte der Matrix $\underline{C}_x$ bezeichnet sind. Diese Eigenschaft gilt für alle kovarianzstationären Prozesse. Wenn die Zufallsvariablen $x_i(e) = x(t_i, e)$ in äquidistanten Zeitpunkten betrachtet werden, so daß $t_{i+n} - t_i = n \cdot \Delta t$ gilt, so ist $\underline{C}_x$ eine sogenannte TOEPLITZ-Matrix, die dadurch ausgezeichnet ist, daß die Elemente in den Diagonalen jeweils gleiche Werte haben.

Die N-dimensionale GAUSSsche Verbundverteilungsdichte kann in Matrixschreibweise wie folgt angegeben werden:

$$p_x(\underline{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det \underline{C}_x}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{u} - \underline{m}_x)^T \underline{C}_x^{-1} (\underline{u} - \underline{m}_x)} \quad (4.6)$$

wobei $p_x(\underline{u})$ eine Kurzschreibweise für $p_x(u_1, u_2, \dots, u_N)$ und $\underline{C}_x^{-1}$ die Inverse der Kovarianzmatrix ist.

Mit

$$\int_{(N)} e^{-\frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{A} \underline{u}} d\underline{u} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \underline{A}}}, \quad (4.7)$$

wobei $\underline{A}$ eine symmetrische $N \times N$ -Matrix ist, deren Inverse $\underline{A}^{-1}$ existiert / 11, S.118/, erhält man aus der Verbundverteilungsdichte nach Gl.(4.6) die charakteristische Funktion

$$\phi(v) = \mathcal{E} e^{j \underline{v}^T \underline{x}(e)} = e^{j \underline{v}^T \underline{m}_x - \frac{1}{2} \underline{v}^T \underline{C}_x \underline{v}}. \quad (4.8)$$

Aus den Gln.(4.6) und (4.8) wird deutlich, daß das Wahrscheinlichkeitsgesetz eines stationären normalverteilten Prozesses vollständig durch den linearen Mittelwert $\underline{m}_x$ und die Kovarianzfunktion $c_x(\tau)$ bestimmt ist. Da die Kovarianzfunktion $c_x(\tau)$ und die spektrale Leistungsdichte $S_x(f)$ über die WIENER-KHINTCHINE-Transformation eindeutig miteinander verknüpft sind, wird ein normalverteilter Prozeß mit $\underline{m}_x = 0$ ebenfalls vollständig durch die Leistungsdichte bestimmt.

Diese Aussage wird auch in dem folgenden Zusammenhang zwischen der Leistungsdichte $S_x(f)$ und einem Grenzwert der Determinante von $\underline{C}_x$ deutlich:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\det \underline{C}_x]^{1/N} = 2f_g \exp \left[\frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} \ln S_x(f) df \right]. \quad (4.9)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß der Prozeß $x(t,e)$ bandbegrenzt im Intervall $-f_g \leq f \leq f_g$ ist. Gl.(4.9) ergibt sich als Sonderfall eines Theorems von SZEGÖ, das wie folgt dargestellt werden kann /292/: Wenn λ_i die Eigenwerte der Kovarianzmatrix $\underline{C}_x$ und $S_x(f)$ das Leistungsspektrum eines bandbegrenzten Prozesses sind, so gilt für jede stetige Funktion $h(\cdot)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{h(\lambda_1) + h(\lambda_2) + \dots + h(\lambda_N)}{N} = \frac{1}{2f_g} \int_{-f_g}^{f_g} h[2f_g S_x(f)] df.$$

Wählt man für $h(\cdot)$ den natürlichen Logarithmus, so erhält man mit Gl.(4.5) sofort die Aussage von Gl.(4.9).

Bei der Einführung der sogenannten Maximum-Entropie-Schätzungen der spektralen Leistungsdichte durch J.P. BURG /183/, vgl. Abschnitt 12.1, spielt

die Entropiedichte eines stationären GAUSS-verteilten Prozesses eine grundlegende Rolle. Nach C.E. SHANNON /290/ ist der mittlere Informationsgehalt oder die (Informations-)Entropie¹⁾ einer stetigen Zufallsvariablen $x(e)$

$$H = - \int p_X(u) \ln p_X(u) du,$$

und für N Zufallsvariable $x_i(e) = x(t_i, e)$, die wiederum in einem Zufallsvektor $\underline{x}(e)$ zusammengefaßt sein mögen, wird die Entropie

$$H_N = - \int_{(N)} p_{\underline{X}}(\underline{u}) \ln p_{\underline{X}}(\underline{u}) d\underline{u}.$$

Beschränkt man sich auf GAUSSverteilte Zufallsvariable, für die bei vorgegebener Leistung σ_X^2 die Entropie im übrigen maximal wird /34/, so ergibt sich mit $p_{\underline{X}}(\underline{u})$ nach Gl.(4.6)

$$H_N = \frac{N}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln \det \underline{C}_{\underline{X}} + \frac{1}{2} \int p_{\underline{X}}(\underline{u}) (\underline{u} - \underline{m}_{\underline{X}})^T \underline{C}_{\underline{X}}^{-1} (\underline{u} - \underline{m}_{\underline{X}}) d\underline{u}.$$

Das Integral nimmt den Wert N an / 3, S.245/, so daß man schließlich

$$H_N = \frac{N}{2} \ln 2\pi e + \frac{1}{2} \ln \det \underline{C}_{\underline{X}} \quad (4.10)$$

erhält.

Beim Übergang zum Prozeß $x(t, e)$, $-\infty < t < \infty$, d.h. für $N \rightarrow \infty$ wächst auch die Entropie nach Gl.(4.10) über alle Grenzen, und man führt deshalb die Entropiedichte

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H_N}{N} = \frac{1}{2} \ln 2\pi e + \frac{1}{2} \ln \lim_{N \rightarrow \infty} (\det \underline{C}_{\underline{X}})^{1/N}$$

als Maß für die mittlere Information des Prozesses ein / 28, S.306/. Mit Gl.(4.9) für den Grenzwert der Kovarianzmatrix ergibt sich daraus

1) Gegen die von SHANNON gewählte Bezeichnung "Entropie" für den mittleren Informationsgehalt und die Versuche, eine Beziehung zwischen dieser Größe und der physikalischen Entropie $S = k \ln w$ herzustellen, vgl. insbesondere /9/, wobei k die BOLTZMANN-Konstante und w eine nichtnormierte thermodynamische Wahrscheinlichkeit ist, sind z.T. ernsthafte Bedenken angemeldet worden /43, 269/. Da sich die Bezeichnung in der Nachrichtentechnik und vor allem in der angelsächsischen Literatur jedoch weitgehend durchgesetzt hat, soll sie auch hier beibehalten werden.

$$h = \frac{1}{2} \ln 4 f_g \pi e + \frac{1}{4 f_g} \int_{-f_g}^{f_g} \ln S_X(f) df. \quad (4.11)$$

Die Entropiedichte eines normalverteilten, in $-f_g \leq f \leq f_g$ bandbegrenzten Prozesses ist also im wesentlichen proportional zum Integral über den Logarithmus der spektralen Leistungsdichte.

Mit dieser Zusammenstellung einiger spezieller Eigenschaften von GAUSSverteilten Prozessen, auf die im folgenden wiederholt zurückgegriffen wird, sollen die einführenden, bewußt knapp gehaltenen, Bemerkungen zur Definition und Kennzeichnung stationärer stochastischer Prozesse abgeschlossen werden.

Im folgenden Abschnitt werden die Möglichkeiten zur Darstellung stationärer Prozesse im Frequenzbereich zusammengestellt, wobei es vor allem um die Zusammenhänge der verschiedenen Kenngrößen mit der spektralen Leistungsdichte geht.

5. Spektrale Kennzeichnung kontinuierlicher Parameterprozesse

Für die folgenden Betrachtungen muß gefordert werden, daß der Prozeß $x(t, e)$ stetig i.q.M. ist, das heißt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}[x(t+h, e) - x(t, e)]^2 = 0.$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Kovarianzfunktion $c_x(\tau)$ für $\tau = 0$ stetig ist; daraus folgt, daß sie beschränkt und überall stetig ist.

5.1 Die Spektralverteilungsfunktion

Offensichtlich gilt für beliebige in $[a, b] \in \mathbb{R}$ stetige komplexwertige Funktionen $\phi(t)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{E} \left| \int_a^b x(t, e) \phi(t) dt \right|^2 &= \mathcal{E} \int_a^b \int_a^b x(t_1, e) x(t_2, e) \phi(t_1) \overline{\phi(t_2)} dt_1 dt_2 \\ &= \int_a^b \int_a^b c_x(t_1 - t_2) \phi(t_1) \overline{\phi(t_2)} dt_1 dt_2 ; \end{aligned}$$

das heißt, daß die Kovarianzfunktion $c_x(\tau)$ positiv semidefinit ist. Nach einem Satz von BOCHNER / 6 / folgt daraus, daß sie in Form eines STIELTJES-Integrals

$$c_x(\tau) = \int e^{j2\pi f\tau} dV_x(f) \quad (5.1)$$

dargestellt werden kann, wobei $V_x(f)$ eine endliche nichtfallende Funktion ist, die deshalb Spektralverteilungsfunktion oder integriertes (Leistungsdichte-)Spektrum genannt wird. Die in Gl.(5.1) angegebene Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion, die sogenannte WIENER-KHINTCHINE-Transformation, ist nicht auf rein stochastische Prozesse beschränkt, sondern gilt für beliebige stetige kovarianzstationäre Prozesse.

In diesem Fall kann die Spektralverteilungsfunktion in zwei Teile aufgespalten werden:

$$V_x(f) = V_c(f) + V_d(f) ,$$

wobei der stetige Anteil in der Form

$$V_c(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V_c'(u) du$$

und der diskrete Teil als Summe

$$V_d(f) = \sum \Delta V(f_i) \cdot 1(f - f_i), \quad \Delta V(f_i) > 0$$

dargestellt werden kann. Dabei ist

$$1(f - f_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } f > f_i \\ 0 & \text{für } f < f_i \end{cases}.$$

Bei dieser Darstellung ist eine dritte sogenannte "singuläre" Komponente / 14, S.488/ unberücksichtigt geblieben, weil sie für die Spektralzerlegung realer Prozesse keine Bedeutung hat. Eine der Spektralverteilungsfunktion entsprechende Aufspaltung läßt sich für den Prozeß angeben:

$$x(t,e) = x_c(t,e) + x_d(t,e).$$

Dabei ist x_c der rein stochastische Anteil, und x_d ist ein deterministischer Prozeß, dessen Musterfunktionen Summen harmonischer Signale sind.

5.2 Die spektrale Leistungsdichte

Nach dieser kurzen Anmerkung zur Darstellung beliebiger stationärer Prozesse (mixed processes), beschränken sich die folgenden Aussagen wiederum auf rein stochastische Prozesse. Dann besteht die Spektralverteilungsfunktion nur aus dem stetigen und differenzierbaren Anteil, so daß Gl.(5.1) als RIEMANN-Integral

$$c_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\tau} V'_x(f) df \quad (5.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\tau} S_x(f) df$$

dargestellt werden kann. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des FOURIER-Integrals (5.2) ist, daß die Kovarianzfunktion betragsintegrierbar ist. Unter Einbeziehung von Distributionen kann die Darstellung (5.2) auch für den Fall beibehalten werden, daß der Prozeß und damit auch $c_x(\tau)$ periodische Anteile enthalten. Allerdings ist dann $S_x(f)$ nicht mehr als gewöhnliche Ableitung, sondern als Derivierte von $V_x(f)$ im Sinne der verallgemeinerten Funktionen aufzufassen /13/.

$S_x(f)$ wird "spektrale Leistungsdichte" oder einfach "Leistungsspektrum" des stationären stochastischen Prozesses $x(t,e)$ genannt. Die zuweilen gebrauchte Bezeichnung "Spektrum" für $S_x(f)$ wird hier nicht verwendet, weil sich, wie im folgenden gezeigt wird, für den Prozeß $x(t,e)$ selbst eine Spektralzerlegung angeben läßt, für die der Name Spektrum vorbehalten sein soll. $S_x(f)$ ist als Ableitung einer Verteilungsfunktion nichtnegativ

$$S_x(f) \geq 0.$$

Da $c_v(\tau)$ für reelle Prozesse eine gerade Funktion ist, ist auch $S_v(f)$ gerade, so daß die Kovarianzfunktion in der reellen Form

$$c_x(\tau) = \int \cos 2\pi f \tau S_x(f) df \quad (5.3)$$

geschrieben werden kann; die zugehörige Umkehrrelation lautet

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \int e^{-j2\pi f \tau} c_x(\tau) d\tau \\ &= \int \cos 2\pi f \tau c_x(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei auf Grund der Wahl von f anstelle von $\omega = 2\pi f$ als unabhängige Veränderliche der Spektralfunktionen der Faktor $1/2\pi$ bei der FOURIER-Transformation entfällt.

Zuweilen wird $S_x(f)$ bzw. die normierte Größe $S_x(f)/c_x^2$ als Spektralverteilungsdichte bezeichnet. In der Tat sind die Eigenschaften und Zusammenhänge von $c_x(\tau)$ und $S_x(f)$, wenn man von konstanten Faktoren absieht, dieselben wie die der charakteristischen Funktion $\phi_y(v)$ und der Amplitudenverteilungsdichte $p_y(u)$ einer Zufallsvariablen $y(e)$. So folgt z.B. wegen

$$S_x(f) \geq 0 \text{ und } p_y(u) \geq 0,$$

daß sowohl $c_x(\tau)$ als auch $\phi_y(v)$ positiv semidefinite Funktionen sind. Außerdem gilt das folgende Kontinuitätstheorem /32/ gleichermaßen für die charakteristische Funktion einer Amplitudenverteilung wie für die Kovarianzfunktion als "charakteristische Funktion" der Spektralverteilung $V_x(f)$:

Für die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{T \rightarrow \infty} V_T(f) = V_x(f)$$

einer Folge von Verteilungsfunktionen $V_T(f)$ mit

$$c_T(\tau) = \int e^{j2\pi f \tau} dV_T(f)$$

ist notwendig und hinreichend, daß eine für $\tau = 0$ stetige Funktion $c_x(\tau)$ als Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_T(\tau) = c_x(\tau), \quad -\infty < \tau < \infty$$

existiert. Die Aussage gilt für alle f , in denen $V_x(f)$ stetig ist, und für beliebige, aber in beiden Grenzwerten gleiche Konvergenzformen. Das heißt, wenn $c_T(\tau)$ im quadratischen Mittel bzw. fast sicher gegen $c_x(\tau)$ konvergiert, so konvergiert entsprechend $V_T(f)$ i.q.M. bzw. fast sicher gegen

$V_X(f)$ (vgl. zu den Konvergenzarten die Ausführungen in 9.3.2).

Mit anderen Worten besagt dieses Theorem, daß aus der Konvergenz des Schätzwertes

$$\hat{c}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+|\tau|)dt$$

gegen die Kovarianzfunktion $c_X(\tau)$ des Prozesses $x(t,e)$ die Konvergenz der entsprechenden Spektralverteilung

$$V_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_T(u) du$$

gegen das integrierte Dichtespektrum $V_X(f)$ des Prozesses folgt, wobei

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} \hat{c}_T(\tau) d\tau$$

ist. Auf diese Zusammenhänge wird später noch einmal zurückgegriffen.

5.3 Die spektrale Leistungsdichte als Grenzwert des Periodogramms

Neben der Einführung von $S_X(f)$ als FOURIER-Transformierte der Kovarianzfunktion $c_X(\tau)$ läßt sich das Leistungsdichtespektrum auch als Grenzwert geeigneter Spektraldarstellungen des Prozesses $x(t,e)$ selbst definieren. Für die erste Darstellung geht man von der gewöhnlichen FOURIER-Transformierten eines endlichen Ausschnittes von $x(t,e)$ für $0 \leq t \leq T$ aus, während die zweite Form auf einer Art "stochastischer" Spektralzerlegung des gesamten Prozesses $x(t,e)$ basiert.

Zunächst soll gezeigt werden, daß der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{-j2\pi f t} x(t,e) dt \right|^2$$

die Leistungsdichte $S_X(f)$ des Prozesses $x(t,e)$ liefert.

Die Größe

$$I_T(f,e) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{-j2\pi f t} x(t,e) dt \right|^2 = \frac{1}{T} |X_T(f,e)|^2$$

wird Periodogramm des Prozesses $x(t,e)$ genannt. Das Periodogramm wird hinsichtlich seiner statistischen Eigenschaften und seiner Bedeutung für die Spektralschätzverfahren im Abschnitt 9.3 ausführlich untersucht.

Schreibt man anstelle des Betragsquadrates ein Doppelintegral, so läßt sich die Erwartungswertbildung unter die Integrale ziehen und man erhält

$$\mathcal{E} I_T(f, e) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T e^{-j2\pi f(t_2 - t_1)} \mathcal{E} x(t_1, e) x(t_2, e) dt_1 dt_2.$$

Auf Grund der vorausgesetzten Stationarität von $x(t, e)$ ergibt sich daraus

$$\mathcal{E} I_T(f, e) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T e^{-j2\pi f(t_2 - t_1)} c_x(t_2 - t_1) dt_1 dt_2,$$

und die Auswertung des Doppelintegrals liefert schließlich

$$\mathcal{E} I_T(f, e) = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) c_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (5.5)$$

Ersetzt man $c_x(\tau)$ durch die WIENER-KHINTCHINE-Beziehung (5.3), so ergibt sich

$$\mathcal{E} I_T(f, e) = \int S_x(u) \frac{\sin^2 \frac{\pi T(f-u)}{2}}{T\pi^2(f-u)^2} du,$$

und für $T \rightarrow \infty$ folgt daraus der gesuchte Zusammenhang

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} I_T(f, e) = S_x(f). \quad (5.6)$$

5.4 Die Spektralzerlegung stationärer Prozesse

Eine weitere Darstellung der spektralen Leistungsdichte basiert auf einer Spektralzerlegung des Prozesses $x(t, e)$ selbst, auf die im folgenden kurz eingegangen werden soll.

Jeder mittelwertfreie kovarianzstationäre stetige Prozeß $x(t, e)$ mit $\mathcal{T} = \{t: -\infty < t < \infty\}$ besitzt nach H. CRAMER / 59 / die Spektralzerlegung

$$x(t, e) = \int e^{j2\pi ft} dZ(f, e), \quad (5.7)$$

wobei $Z(f, e)$, $-\infty < f < \infty$, ein komplexer Prozeß mit orthogonalen Inkrementen ist / 14/, das heißt

$$\mathcal{E} [Z(f_1, e) - Z(f_2, e)] \cdot \overline{[Z(f_3, e) - Z(f_4, e)]} = 0 \quad \text{für } f_1 > f_2 \geq f_3 > f_4. \quad (5.8)$$

Diese Orthogonalitätsbedingung ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

In Analogie zur Umkehrformel für FOURIER-STIELTJES-Integrale von gewöhnlichen Funktionen, vgl. / 6 /, wird auch der Frequenzprozeß $Z(f, e)$ bis auf

eine Konstante durch

$$Z(f, e) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-j2\pi f t} - 1}{-j t} x(t, e) dt \quad (5.9)$$

bestimmt / 20, S.30/. Es ist üblich, $Z(f, e)$ als "verallgemeinerte" FOURIER-Transformierte von $x(t, e)$ zu bezeichnen und in der zu Gl.(5.9) äquivalenten Form

$$Z(f_1, e) - Z(f_2, e) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-j2\pi f_1 t} - e^{-j2\pi f_2 t}}{-j t} x(t, e) dt \quad (5.10)$$

darzustellen.

Daraus folgt mit $f_1 = f + \Delta f$ und $f_2 = f - \Delta f$

$$Z(f + \Delta f, e) - Z(f - \Delta f, e) = \int e^{-j2\pi f t} \frac{\sin 2\pi \Delta f t}{\pi t} x(t, e) dt,$$

und man erkennt, daß $Z(f + \Delta f, e) - Z(f - \Delta f, e)$ die gewöhnliche FOURIER-Transformierte von $[x(t, e) \cdot \sin 2\pi \Delta f t] / \pi t$ ist. Aus der zugehörigen Rücktransformation

$$x(t, e) \frac{\sin 2\pi \Delta f t}{2\pi \Delta f t} = \int e^{j2\pi f t} \frac{Z(f + \Delta f, e) - Z(f - \Delta f, e)}{2\Delta f} df$$

erhält man für $\Delta f \rightarrow 0$ die Spektralzerlegung (5.7).

Der Zusammenhang (5.10) läßt sich sehr einfach physikalisch interpretieren, wenn man einen idealen Bandpaß mit dem Frequenzgang

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } f_2 \leq f \leq f_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und der zugehörigen Impulsantwort

$$h(t) = \int_{f_2}^{f_1} e^{j2\pi f t} df = \frac{e^{j2\pi f_1 t} - e^{j2\pi f_2 t}}{j2\pi t}$$

betrachtet. Wird nun $x(t, e)$ auf den Eingang dieses Systems gegeben, so erhält man als Ausgang den Prozeß

$$y_{12}(t, e) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{j2\pi f_1(t-\tau)} - e^{j2\pi f_2(t-\tau)}}{j(t-\tau)} x(\tau, e) d\tau,$$

und für $t = 0$ folgt daraus mit Gl.(5.10)

$$y_{12}(0, e) = Z(f_1, e) - Z(f_2, e). \quad (5.11)$$

Entsprechend erhält man am Ausgang eines zweiten Bandpasses

mit $f_2 \geq f_3 > f_4$ einen Prozeß $y_{34}(t,e)$. Die beiden Prozesse $y_{12}(t,e)$ und $y_{34}(t,e)$ sind auf Grund ihrer Entstehung aus $x(t,e)$ durch zwei disjunkte Filter orthogonal [31], das heißt:

$$\mathcal{E} y_{12}(t,e) \overline{y_{34}(t,e)} = 0.$$

Mit Gl.(5.11) folgt daraus die Orthogonalitätsbedingung (5.8) für den Prozeß $Z(f,e)$.

Wenn $x(t,e)$ ein normalverteilter Prozeß ist, dann ist auch die verallgemeinerte FOURIER-Transformierte $Z(f,e)$ nach Gl.(5.9) normalverteilt. Da aber bei GAUSSverteilten Prozessen aus der Orthogonalität die statistische Unabhängigkeit folgt, ist $Z(f,e)$ in diesem Fall ein Prozeß mit unabhängigen Inkrementen.

5.5 Zusammenhang mit der Leistungsdichte

Um einen Zusammenhang der verallgemeinerten Transformaten $Z(f,e)$ mit der spektralen Leistungsdichte $S_x(f)$ des Prozesses $x(t,e)$ herzustellen, soll noch einmal der Bandpaß-Prozeß $y_{12}(t,e)$ betrachtet werden, dessen Dichtespektrum

$$S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \begin{cases} S_x(f) & \text{für } f_2 \leq f \leq f_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und dessen Gesamtleistung

$$\mathcal{E} |y_{12}(t,e)|^2 = \int S_y(f) df = \int_{f_2}^{f_1} S_x(f) df$$

ist. In Verbindung mit Gl.(5.11) ergibt sich daraus der gesuchte Zusammenhang

$$\mathcal{E} |Z(f_1,e) - Z(f_2,e)|^2 = \int_{f_2}^{f_1} S_x(f) df. \quad (5.12)$$

Dieses Ergebnis macht deutlich, daß die Leistungsdichte $S_x(f)$, die ja formal das Spektrum der Kovarianzfunktion darstellt, tatsächlich auch ein Maß für die Spektralzerlegung des Prozesses selbst ist, denn Gl.(5.12) besagt, daß die Leistung von $x(t,e)$ in einem Frequenzintervall gleich dem quadratischen Mittelwert der verallgemeinerten FOURIER-Komponenten des Prozesses in diesem Intervall ist.

Anhand von Gl.(5.12) kann außerdem gezeigt werden, daß der Prozeß $Z(f,e)$ in

den hier interessierenden Fällen nicht differenzierbar ist, so daß für die Spektralzerlegung nach Gl.(5.7) die Verwendung von STIELTJES-Integralen unumgänglich ist. Wenn nämlich der Zeitprozeß $x(t,e)$ eine stetige Leistungsdichte $S_x(f) \neq 0$ besitzt, so gilt für kleine Δf

$$E|Z(f+\Delta f,e) - Z(f,e)|^2 = \int_f^{f+\Delta f} S_x(u) du \approx S_x(f) \Delta f,$$

das heißt, daß der mittlere quadratische Zuwachs von $Z(f,e)$ die Ordnung Δf hat. Dann ist aber der Zuwachs von $Z(f,e)$ selbst von der Ordnung $\sqrt{\Delta f}$, was mit der Annahme der Differenzierbarkeit nicht vereinbar ist.

Die vorliegenden Betrachtungen anhand des idealen Bandpasses stellen eine erste Querverbindung zu den Spektralschätzverfahren her. Da es nicht möglich ist, die stetige Leistungsdichte für eine Frequenz punktuell zu messen, weil in ein Frequenzintervall der Breite 0 keine Leistung entfällt, wird als ein Schätzwert für $S_x(f)$ die auf die Breite bezogene Leistung eines endlichen Intervalls verwendet. Der Erwartungswert dieser Schätzung stimmt i.w. mit der rechten Seite von Gl.(5.12) überein.

Die Ausführungen in diesem Abschnitt bilden i.w. den theoretischen Hintergrund für die analogen Spektralschätzverfahren. Für die Darstellung der digitalen Verfahren zur Schätzung von $S_x(f)$ kontinuierlicher Parameterprozesse stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung: Entweder bezieht man den erforderlichen Abtastvorgang in geeigneter Form in die Verfahren ein oder man geht von diskreten Prozessen aus, nachdem man einmal den Zusammenhang zwischen den entsprechenden "kontinuierlichen" und "diskreten" Kenngrößen aufgezeigt hat. Im folgenden wird der zweite Weg beschritten, weil dadurch eine übersichtlichere Darstellung erreicht wird. Aus diesem Grunde wird in Analogie zu diesem Abschnitt im folgenden auf die spektrale Kennzeichnung diskreter Parameterprozesse näher eingegangen.

6. Spektrale Kennzeichnung von diskreten Parameterprozessen

Die modernen Spektralschätzverfahren basieren auf digitalen Berechnungsverfahren und setzen deshalb diskrete Signale, d.h. Folgen von Zahlenwerten voraus. Im Hinblick auf die Beurteilung dieser Schätzwerte ist es sinnvoll, eine solche Wertefolge als Teil einer Musterfunktion eines diskreten Parameterprozesses $x(t_n, e)$, $t_n \in \mathcal{T}$ anzusehen. Dabei können solche Prozesse entweder durch Abtasten in äquidistanten oder auch nichtäquidistanten Zeitpunkten eines kontinuierlichen Parameterprozesses erzeugt werden, oder sie besitzen von vornherein eine diskrete Parametermenge.

Im folgenden werden ausschließlich Zeitprozesse betrachtet, deren Parametermenge aus äquidistanten Punkten der Zeitachse gebildet werden, das heißt $\mathcal{T} = \{t_n = n \cdot \Delta t; n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Auf die besonderen Probleme, die sich bei der Gewinnung eines solchen Prozesses durch Abtasten eines kontinuierlichen Parameterprozesses ergeben, wird im 8. Abschnitt eingegangen.

Aus schreibtechnischen Gründen wird das Zeitintervall Δt nicht mehr mitgeschrieben und ein diskreter Parameterprozeß $x(n \Delta t, e)$ in der vereinfachten Form $x(n, e)$ gekennzeichnet. Für den Fall, daß die Parametermenge $\mathcal{T}$ aus nichtäquidistanten Zeitpunkten besteht, wie dies zum Beispiel im Zusammenhang mit stochastischen Abtastverfahren der Fall ist, müßte natürlich die Bezeichnung $x(t_n, e)$ beibehalten werden.

Die Musterfunktion eines diskreten Prozesses ist eine Folge von Zufallszahlen, die im physikalischen Sinn weder eine endliche Energie noch eine Leistung beinhaltet. Es ist aber üblich und wird deshalb auch hier beibehalten, in Anlehnung an die kontinuierlichen Signale und Prozesse für entsprechend definierte Größen von der Gesamtleistung und der Leistungsdichte diskreter Parameterprozesse zu sprechen. Falls diese Größen für die Kennzeichnung eines kontinuierlichen Parameterprozesses herangezogen werden, muß unter Berücksichtigung des Abtastintervalls Δt bzw. der Abtastfrequenz $f_{ab} = 1/\Delta t$ in geeigneter Weise rückgerechnet werden. So besteht unter bestimmten Voraussetzungen, wie später gezeigt wird, zwischen dem "kontinuierlichen" Spektrum $S_x(f)$ und dem Spektrum $S_x^*(\lambda)$, $-1/2 < \lambda \leq 1/2$, des diskreten Parameterprozesses die Verbindung

$$S_x(f) = \Delta t S_x^*(f \Delta t), \quad -\frac{1}{2\Delta t} < f \leq \frac{1}{2\Delta t}.$$

In diesem Zusammenhang soll angemerkt werden, daß im allgemeinen für die Kenngrößen der diskreten Parameterprozesse dieselben Bezeichnungen gewählt werden wie im kontinuierlichen Fall. Nur wenn diskrete und kontinuierliche Größen nebeneinander auftreten, werden die diskreten mit dem Symbol *ge-

kennzeichnet. Davon unbeschadet wird die Frequenzvariable der Spektralfunktionen diskreter Prozesse grundsätzlich mit λ bezeichnet. Wie im folgenden gezeigt wird, ist $S_X^*(\lambda)$ im Intervall $-1/2 < \lambda \leq 1/2$ definiert, während $S_X(f)$ im allgemeinen für $-\infty < f < \infty$ erklärt ist. Wenn $S_X^*(\lambda)$ wie oben angenommen, aus äquidistanten Abtastwerten bestimmt wird, besteht der Zusammenhang $\lambda = f \cdot \Delta t$ (vgl. Abschnitt 8.1).

6.1 Spektralzerlegung der Kovarianzfolge

Es sei nun $x(n, e)$ ein kovarianzstationärer Prozeß, dessen Mittelwert

$$m_X = \mathcal{E}x(n, e) = 0$$

sein möge. Dann ist

$$c_X(k) = \mathcal{E}x(n, e) x(n+k, e) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (6.1)$$

die Kovarianzfunktion oder genauer die Kovarianzfolge des Prozesses. Unter der Bedingung, daß $c_X(k)$ absolut summierbar ist, konvergiert die Reihe

$$\sum c_X(k) e^{-j2\pi\lambda k} = c_X(e^{j2\pi\lambda}) \quad (6.2)$$

gleichmäßig gegen die stetige Funktion $c_X(e^{j2\pi\lambda})$. Diese Funktion ist ausserdem periodisch in λ mit der Periodendauer 1, denn es gilt

$$e^{-j2\pi(\lambda+1)k} = e^{-j2\pi\lambda k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

und kann deshalb als FOURIER-Reihe dargestellt werden. Diese Reihe ist aber offensichtlich identisch mit der in Gl.(6.2), so daß die Werte der Kovarianzfolge $c_X(k)$ als FOURIER-Koeffizienten in der üblichen Form

$$c_X(k) = \int_{-1/2}^{1/2} c_X(e^{j2\pi\lambda}) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda \quad (6.3)$$

bestimmt werden können.

In Analogie zu dem FOURIER-Transformationspaar (5.2) und (5.4) für kontinuierliche Parameterprozesse ist es naheliegend, die Gln.(6.2) und (6.3) als WIENER-KHINTCHINE-Transformation für diskrete Prozesse zu bezeichnen. Dabei entspricht die Frequenzfunktion $c_X(\cdot)$ offensichtlich der spektralen Leistungsdichte und soll deshalb im folgenden auch so bezeichnet werden:

$$c_X(e^{j2\pi\lambda}) \equiv S_X(\lambda), \quad -\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{1}{2}. \quad (6.4)$$

Die Beschränkung auf das Frequenzintervall $-\frac{1}{2} < \lambda \leq +\frac{1}{2}$ ist zulässig und sinnvoll, denn gemäß Gl.(6.3) wird die Kovarianzfolge $c_x(k)$ eindeutig durch die Rücktransformation über diesen Frequenzbereich bestimmt.

Diese Zusammenhänge ergeben sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, auch auf Grund allgemeiner Überlegungen.

Entsprechend der Vorgehensweise im kontinuierlichen Fall läßt sich leicht nachweisen, daß die Kovarianzfolge $c_x(k)$ positiv semidefinit ist und deshalb in der Form

$$c_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi\lambda k} dV_x(\lambda) \quad (6.5)$$

dargestellt werden kann / 41 /. Dabei ist $V_x(\lambda)$ eine nichtfallende Funktion im Intervall $-\frac{1}{2} < \lambda \leq +\frac{1}{2}$ und wird Spektralverteilungsfunktion oder integriertes Spektrum des diskreten Parameterprozesses $x(n,e)$ genannt. Wenn $x(n,e)$ ein rein stochastischer Prozeß ist, also keine periodischen Anteile enthält, dann ist $V_x(\lambda)$ stetig, und es existiert eine spektrale Leistungsdichte als Ableitung von $V_x(\lambda)$

$$S_x(\lambda) = \frac{dV_x(\lambda)}{d\lambda}.$$

Damit läßt sich Gl.(6.5) in der Form

$$c_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi\lambda k} S_x(\lambda) d\lambda \quad (6.6)$$

schreiben, und in Verbindung mit Gl.(6.4) ist die Aussage von Gl.(6.3) verifiziert. Die zugehörige Umkehrrelation lautet

$$S_x(\lambda) = \sum c_x(k) e^{-j2\pi\lambda k}. \quad (6.7)$$

6.2 Die Spektralzerlegung des Prozesses

Entsprechend der Spektraldarstellung (6.6) der Kovarianzfolge läßt sich auch für den Prozeß $x(n,e)$ selbst eine "stochastische" FOURIER-Zerlegung

$$x(n,e) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi\lambda n} dZ(\lambda,e) \quad (6.8)$$

angeben / 59 /, wobei $Z(\lambda,e)$, $-\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{1}{2}$, ein Prozeß mit orthogonalen Inkrementen ist, das heißt

$$E dZ(\lambda_1,e) \overline{dZ(\lambda_2,e)} = 0 \quad \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2. \quad (6.9)$$

Wenn der Prozeß $x(n,e)$ normalverteilt ist, dann ist auch $Z(\lambda,e)$ normalverteilt und damit ein Prozeß mit unabhängigen Inkrementen.

Setzt man die Spektralzerlegung (6.8) in die Definitionsgleichung für die Kovarianzfolge ein, wobei es zweckmäßig ist, von der allgemeinen Form

$$c_x(k) = \mathcal{E} x(n+k,e) \overline{x(n,e)}$$

für komplexe Prozesse auszugehen, die im reellen Fall natürlich mit Gl.(6.1) identisch ist, so erhält man

$$c_x(k) = \iint_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi[\lambda_1(n+k) - \lambda_2 n]} \mathcal{E} dZ(\lambda_1,e) \overline{dZ(\lambda_2,e)}.$$

Auf Grund der Orthogonalitätsbedingung (6.9) reduziert sich das Doppelintegral auf das Einfachintegral

$$c_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi\lambda k} \mathcal{E} |dZ(\lambda,e)|^2,$$

und der Vergleich mit Gl.(6.5) liefert

$$\mathcal{E} |dZ(\lambda,e)|^2 = dV_x(\lambda). \quad (6.10)$$

Damit ist noch einmal auf formalem Wege der Zusammenhang zwischen dem integrierten Spektrum $V_x(\lambda)$ und der Spektralzerlegung des Prozesses selbsthergestellt worden. Der Zuwachs der Spektralverteilungsfunktion, das heißt die Leistung in einem Frequenzband, ist ein Maß für den quadratischen Mittelwert der Spektralkomponenten des Prozesses in diesem Frequenzband.

6.3 Das Leistungsdichtespektrum als Grenzwert des Periodogramms

Wie im kontinuierlichen Fall, läßt sich die spektrale Leistungsdichte eines diskreten stochastischen Parameterprozesses $x(n,e)$ aus dem Erwartungswert des Periodogramms

$$I_N(\lambda,e) = \frac{1}{N} \left| \sum_0^{N-1} x(n,e) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2$$

für $N \rightarrow \infty$ gewinnen. Entsprechend der Vorgehensweise im voranstehenden Abschnitt kann man zeigen, daß

$$\mathcal{E} I_N(\lambda,e) = \sum_{1-N}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_x(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

gilt, und in Verbindung mit Gl.(6.7) erhält man daraus die gewünschte Darstellung

$$S_x(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} I_N(\lambda, e) \quad . \quad (6.11)$$

In diesem Abschnitt sind die wesentlichen Definitionen und Zusammenhänge der spektralen Kenngrößen kontinuierlicher und diskreter Parameterprozesse dargestellt worden.

Bevor auf die Erzeugung diskreter Prozesse durch Abtastung kontinuierlicher Zeitprozesse und auf die Zusammenhänge zwischen ihren entsprechenden Kenngrößen eingegangen wird, sollen im folgenden Abschnitt Modelle für diskrete Parameterprozesse auf der Grundlage bestimmter diskreter Formfilter eingeführt werden.

7. Modelle für diskrete Parameterprozesse

Die im folgenden betrachteten Modelle für diskrete Parameterprozesse bilden die Grundlage der sogenannten parametrischen Spektralschätzverfahren. Dabei kann von der Vorstellung ausgegangen werden, daß der zu analysierende Prozeß $x(n,e)$ durch "Formfilterung" aus einem diskreten "Weißen Prozeß" entstanden ist. Das Schätzverfahren selbst besteht dann darin, die unbekannten Parameter des diskreten Formfilters zu bestimmen.

Unter einem "Weißen Prozeß" mit der diskreten Parametermenge $\mathcal{T} = \{n; n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ wird ein mittelwertfreier Prozeß $w(n,e)$ verstanden, dessen spektrale Leistungsdichte konstant ist:

$$S_w(\lambda) = S_0, \quad -\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{1}{2}$$

und für dessen Kovarianzfunktion deshalb

$$c_w(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_w(\lambda) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda = S_0 \cdot \gamma_0(k) \quad (7.1)$$

gilt. Dabei ist

$$\gamma_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

ein einzelner Impuls / 37 /, der im Bereich der diskreten Signalverarbeitung eine ähnliche Rolle spielt wie die DIRAC-Funktion im Zusammenhang mit kontinuierlichen Systemen. Im Gegensatz zu einem "Weißen Prozeß" mit kontinuierlicher Parametermenge $\mathcal{T} = \{t; -\infty < t < \infty\}$, dessen Gesamtleistung unbegrenzt ist, bleibt die Leistung eines diskreten "Weißen Prozesses" offensichtlich endlich:

$$\mathcal{E} w^2(n,e) = \sigma_w^2 = c_w(0) = S_0.$$

An dieser Stelle soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß Begriffe wie Leistung und Leistungsdichte bei diskreten Parameterprozessen nicht im physikalischen Sinne verwendet werden, vgl. Seite 47. Aus diesem Grunde ergibt sich auch die formale Identität von σ_w^2 und S_0 im vorliegenden Zusammenhang.

Gibt man einen solchen Prozeß auf den Eingang eines diskreten linearen, zeitinvarianten und stabilen Formfilters, Bild 7.1, mit der Impulsantwort $h(n)$ und der Frequenzgangfunktion / 37 /

$$H(e^{j2\pi\lambda}) = \sum h(n) e^{-j2\pi\lambda n}, \quad (7.2)$$

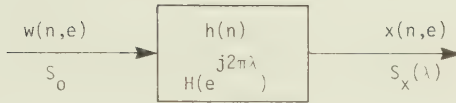


Bild 7.1

so erhält man am Ausgang einen kovarianzstationären Prozeß $x(n,e)$ mit der Kovarianzfunktion

$$c_x(k) = S_0 \sum h(l) h(k-l) \equiv S_0 r_h(k) \quad (7.3)$$

und dem Leistungsdichtespektrum

$$S_x(\lambda) = |H(e^{j2\pi\lambda})|^2 S_0, \quad (7.4)$$

wobei $r_h(k)$ als Autokorrelationsfolge der Impulsantwort $h(n)$ angesehen werden kann und

$$|H(e^{j2\pi\lambda})|^2 = \sum r_h(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

als "Leistungsübertragungsfaktor" / 35, 36/ des Formfilters bezeichnet wird. Die Gl.n. (7.3) und (7.4) können sehr einfach aus der Faltungsbeziehung

$$x(n,e) = \sum h(l) w(n-l,e)$$

zwischen Ein- und Ausgangsprozeß abgeleitet werden.

Ausgehend von Gl. (7.4) erhält man mit der WIENER-KHINTCHINE-Transformation (6.6) für die Kovarianzfolge

$$c_x(k) = S_0 \int_{-1/2}^{1/2} |H(e^{j2\pi\lambda})|^2 e^{j2\pi\lambda k} d\lambda.$$

Dieses Integral läßt sich mit Hilfe des Residuensatzes auswerten, wenn man $\exp(j2\pi\lambda) = z$ substituiert:

$$c_x(k) = \frac{S_0}{2\pi j} \oint_C H(z) H(z^{-1}) z^{k-1} dz$$

und als Integrationsweg den Einheitskreis wählt. Dann liegen alle Pole von $H(z)$ innerhalb und die von $H(z^{-1})$ außerhalb des Einheitskreises.

Für die Modellierung von diskreten Parameterprozessen werden Formfilter verwendet, deren Frequenzgang eine rationale Funktion von $\exp(j2\pi\lambda)$ ist. Dann ist auch die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \sum h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}} \quad (7.5)$$

eine rationale Funktion in z und der Frequenzgang ist die Entwicklung von $H(z)$ auf dem Einheitskreis $|z| = 1$.

Wenn die Erzeugung des Prozesses $x(n,e)$ vornehmlich unter dem Aspekt erfolgt, gemäß Gl.(7.4) ein bestimmtes Leistungsdichtespektrum zu erzielen, so ist es darüber hinaus sinnvoll, sich auf minimalphasige Systeme zu beschränken. Dazu muß gefordert werden, daß die Pole von $H(z)$ innerhalb und die Nullstellen nicht außerhalb des Einheitskreises der komplexen z -Ebene liegen / 37 /.

Ausgehend von der allgemeinen Form der Übertragungsfunktion $H(z)$ nach Gl.(7.5), auf die später noch einmal zurückgegriffen wird, lassen sich zwei wichtige Sonderfälle angeben, indem K oder L gleich Null gesetzt werden.

7.1 Autoregressive Prozesse

Für $L = 0$ erhält man als Formfilter ein sogenanntes All-Pol-Modell mit der Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^K a_k z^{-k}}, \quad (7.6)$$

wobei $a_0 = b_0 = 1$ gesetzt worden sind. Der mit diesem Formfilter erzeugte Prozeß, vgl. Bild 7.2, genügt der Differenzengleichung

$$x(n,e) = - \sum_{k=1}^K a_k x(n-k,e) + w(n,e) \quad (7.7)$$

und wird in der statistischen Literatur üblicherweise als Autoregressiver Prozeß - im folgenden kurz AR-Prozeß - bezeichnet.

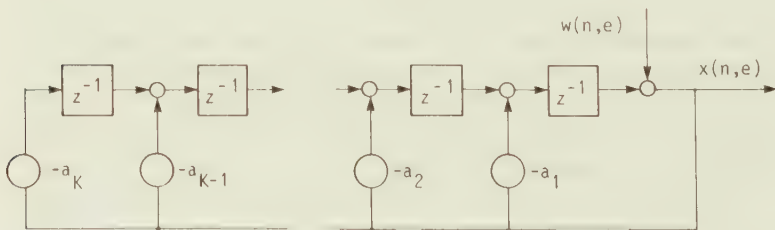


Bild 7.2

Das Leistungsdichtespektrum eines solchen Prozesses läßt sich nach Gl.(7.4) in der Form

$$S_X(\lambda) = \frac{S_0}{\left| 1 + \sum_{k=1}^K a_k e^{-j2\pi\lambda k} \right|^2} \quad (7.8)$$

darstellen. Dazu soll bemerkt werden, daß dieses Ergebnis nicht durch Anwendung der z-Transformation auf Gl.(7.7) gewonnen werden kann, wie dies in der Literatur gelegentlich zu finden ist, weil für die stationären Prozesse $x(n,e)$ und $w(n,e)$ keine z-Transformierten existieren.

Möchte man dennoch die spektrale Leistungsdichte $S_X(\lambda)$ direkt aus der Differenzengleichung (7.7) ableiten, so ist es notwendig, auf die am Ende des letzten Abschnitts angegebene Definition der Leistungsdichte als Grenzwert des Periodogramms zurückzugreifen.

Dazu betrachtet man Gl.(7.7) zunächst für endliche Abschnitte der Länge N der beteiligten Prozesse

$$x_N(n,e) = \begin{cases} x(n,e) & \text{für } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{für } n < 0 \text{ und } n > N-1 \end{cases}$$

und entsprechend $w_N(n,e)$, für die formal die z- und FOURIER-Transformierten existieren. Die so modifizierte Gleichung kann dann der FOURIER-Transformation unterworfen werden und führt auf

$$X_N(\lambda,e) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^K a_k e^{-j2\pi\lambda k}} W_N(\lambda,e),$$

wobei $X_N(\lambda,e)$ und $W_N(\lambda,e)$ komplexe Prozesse sind, deren Parametermenge $\mathcal{L} = \{\lambda; -1/2 < \lambda \leq 1/2\}$ ist.

Daraus erhält man nach Multiplikation mit der konjugiert komplexen Form gemäß Gl.(6.11) die gewünschte Darstellung (7.8) für $S_X(\lambda)$.

AR-Prozesse werden zum ersten Mal 1927 von G.U. YULE /91/ in einer Untersuchung über die Schwankungen der WOLFERSchen Zahl der Sonnenflecken verwendet. Im Zusammenhang mit Spektralschätzverfahren haben die AR-Modelle jedoch erst nach der Einführung der sogenannten Maximum-Entropie-Schätzwerte 1967 durch J.P. BURG /183,184/ und mit dem ersten Vorschlag für einen Leistungsdichteschätzwert in der Form von Gl.(7.8) durch E. PARZEN /138/ im Jahre 1968 an Bedeutung gewonnen. Zur Zeit bilden die AR-Schätzwerte wohl die wichtigste Klasse im Bereich der parametrischen Spektralschätzverfahren. Der wesentliche Grund dafür ist, daß die Bestimmung der Modellparameter $a_k, k=1, \dots, K$, auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems führt.

7.2 Moving-Average-Prozesse

Aus Gl.(7.5) erhält man für $K = 0$ die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \sum_{l=0}^L b_l z^{-l} \quad (7.9)$$

eines sogenannten nichtrekursiven Formfilters, dessen Struktur in Bild 7.3 angegeben ist. Für $z = \exp(j2\pi\lambda)$ zeigt der Vergleich mit der Definition des Frequenzganges, Gl.(7.2), daß die Koeffizientenfolge b_n offensichtlich gleich der Impulsantwort $h(n)$ ist. Die zu Gl.(7.9) äquivalente stochastische Differenzengleichung lautet

$$x(n,e) = \sum_{l=0}^L b_l w(n-l,e) \quad (7.10)$$

und stellt offenbar eine durch die Koeffizienten b_l bewertete "gleitende Mittelung" über L aufeinanderfolgende Zufallsvariable des Eingangsprozesses $w(n,e)$ dar. Deshalb wird der so gebildete Prozeß $x(n,e)$ als "Moving-Average-Prozeß" (MA-Prozeß) bezeichnet.

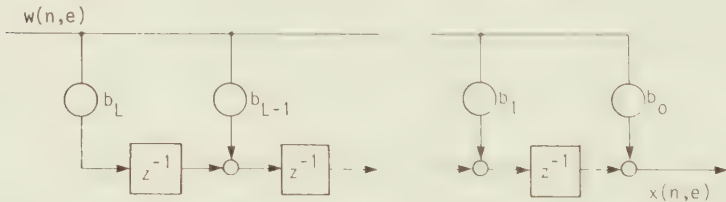


Bild 7.3

Die spektrale Leistungsdichte eines solchen Prozesses ergibt sich zu

$$S_x(\lambda) = \left| \sum_{l=0}^L b_l e^{-j2\pi\lambda l} \right|^2 \cdot S_0. \quad (7.11)$$

Die Bedeutung dieser Klasse liegt vor allem darin, daß jeder Leistungsdichte $S_x(\lambda)$, die als Ableitung der Spektralverteilung $V_x(\lambda)$ existiert, ein MA-Prozeß zugeordnet werden kann.

Wenn nämlich $V_x(\lambda)$ differenzierbar ist, so ist der zugeordnete Prozeß $x(n,e)$ rein stochastisch und kann durch Formfilterung aus einem "Weißen Prozeß"

erzeugt werden. Dann läßt sich die Leistungsdichte $S_x(\lambda)$ gemäß Gl.(7.4) darstellen, und für den Betrag des Frequenzgangs gilt

$$|H(e^{j2\pi\lambda})| = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \sqrt{S_x(\lambda)}$$

Da $S_x(\lambda)$ eine gerade Funktion ist, kann sie als Produkt

$$S_x(\lambda) = P(e^{j2\pi\lambda}) P(e^{-j2\pi\lambda}) = |P(e^{j2\pi\lambda})|^2$$

geschrieben werden. Beachtet man im Hinblick auf die Stationarität des Prozesses $x(n,e)$, daß die Pole von $P(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen, und daß die Zuordnung der Nullstellen auf $P(z)$ und $P(z^{-1})$ im Prinzip willkürlich ist, weil $S_x(\lambda)$ keine Phaseninformation enthält, so darf man für den Frequenzgang des Formfilters

$$H(e^{j2\pi\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \cdot P(e^{j2\pi\lambda})$$

schreiben. Die Aufteilung der Nullstellen von $S_x(z)$ auf $P(z)$ und $P(z^{-1})$ kann z.B. so erfolgen, daß $P(z)$ minimalphasig ist, vgl. S.54 oben.

Nun ist $P(z)$ für $|z| \geq 1$ analytisch, so daß für die Frequenzgangfunktion die Darstellung

$$H(e^{j2\pi\lambda}) = \sum_0 d_n e^{-j2\pi\lambda n}$$

mit

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \int_{-1/2}^{1/2} P(e^{j2\pi\lambda}) e^{j2\pi\lambda n} d\lambda$$

gilt. Der Vergleich mit Gl.(7.2) zeigt, daß die Folge d_n offenbar die Impulsantwort des Formfilters ist. Damit kann der Prozeß $x(n,e)$ in der einseitigen MA-Form

$$x(n,e) = \sum_{k=0} d_k w(n-k,e) \quad (7.12)$$

dargestellt werden, wobei $w(n,e)$ ein "Weißer Prozeß" ist.

Ogleich, wie eben gezeigt worden ist, der MA-Prozeß das allgemeinere Modell eines diskreten Parameterprozesses darstellt, haben die MA-Prozesse im Zusammenhang mit den parametrischen Schätzverfahren der Leistungsdichte keine große Bedeutung. Das liegt vor allem daran, daß der Spektralschätzwert

auf der Grundlage eines MA-Modells formal mit einem nichtparametrischen Schätzwert übereinstimmt. Beachtet man nämlich, daß die Kovarianzfolge eines MA-Prozesses nach Gl.(7.10)

$$c_x(k) = S_0 \sum_{0}^{L-|k|} b_1 b_{1+|k|} \quad \text{für } |k| \leq L \quad (7.13)$$

ist, so kann die spektrale Leistungsdichte als endliche Summe

$$S_x(\lambda) = S_0 \sum_{-L}^L c_x(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

dargestellt werden. Dieses Ergebnis erhält man natürlich auch durch geeignetes Umformen aus Gl.(7.11).

Damit kann aber ein Schätzwert für $S_x(\lambda)$ auf der Grundlage eines "beschnittenen" Kovarianzschätzwertes $\hat{c}_x(k)$ berechnet werden, ohne daß die MA-Modellparameter b_1 selbst bestimmt werden müssen, was im übrigen mit der Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems verbunden ist.

7.3 ARMA-Prozesse

Wählt man zur Erzeugung eines diskreten stochastischen Prozesses ein Formfilter mit der allgemeinen rationalen Übertragungsfunktion nach Gl.(7.5)

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^K a_k z^{-k}},$$

deren prinzipielle Struktur in Bild 7.4 dargestellt ist, so erhält man einen sogenannten gemischten "Autoregressiven-Moving-Average" oder kurz ARMA-Prozeß der Ordnung (K,L), welcher der Differenzengleichung

$$x(n,e) = \sum_{k=0}^K a_k x(n-k,e) + \sum_{l=0}^L b_l w(n-l,e) + w(n,e) \quad (7.14)$$

genügt, wobei $a_0 = b_0 = 1$ gesetzt worden sind. Die spektrale Leistungsdichte eines solchen Prozesses ergibt sich mit Gl.(7.4) zu

$$S_x(\lambda) = \frac{|1 + \sum_{l=0}^L b_l e^{-j2\pi\lambda l}|^2}{|1 + \sum_{k=0}^K a_k e^{-j2\pi\lambda k}|^2} S_0. \quad (7.15)$$

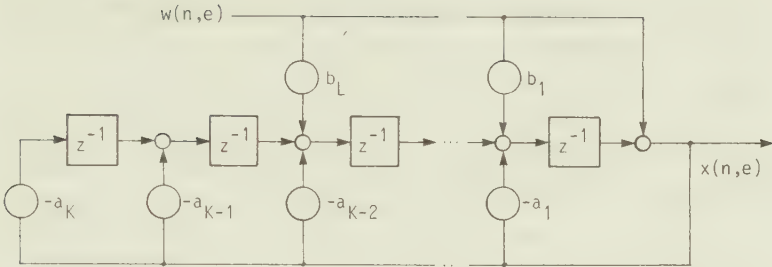


Bild (7.4)

Oggleich die Bestimmung der Modellparameter b_l , $l=1,2,\dots,L$, und a_k , $k=1,2,\dots,K$, wie im Fall der MA-Prozesse nur iterativ erfolgen kann, ist es in manchen Anwendungen unter dem Gesichtspunkt der Rechenzeitersparnis dennoch günstiger, von einem ARMA-Modell für den zu analysierenden Prozeß auszugehen, weil dieses Modell oftmals mit der kleinsten Anzahl von zu schätzenden Parametern auskommt.

Ein anderes wichtiges Anwendungsgebiet für ARMA-Prozesse stellt die Modellierung von diskreten gemischten deterministisch-stochastischen Prozessen dar. Oggleich diese Prozesse im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur eine untergeordnete Rolle spielen, soll abschließend als ein Beispiel aus diesem Problemkreis das Modell eines harmonischen Prozesses entwickelt werden, der additiv von einem "Weißen Geräusch" überlagert ist /205/.

Der aus M harmonischen Anteilen bestehende diskrete Prozeß

$$y(n) = \sum_{m=1}^M a_m \sin(2\pi\lambda_m n - \phi_m)$$

wird durch die Differenzengleichung

$$y(n) = -\sum_{l=1}^{2M} c_l y(n-l)$$

modelliert, wobei sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$1 + \sum_{l=1}^{2M} c_l z^{-l} = 0$$

auf dem Einheitskreis liegen und die Amplituden a_m sowie die Phasen ϕ_m durch geeignete Vorgabe der Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Überlagert man diesem deterministischen Prozeß ein "weißes Geräusch" $w(n,e)$, so erhält man einen Prozeß

$$x(n,e) = y(n) + w(n,e) = - \sum_1^{2M} c_1 y(n-1) + w(n,e),$$

der sich als ARMA-Prozeß darstellen läßt, wie man sofort erkennt, wenn man in der Summe $y(n-1)$ durch $x(n-1,e) - w(n-1,e)$ ersetzt:

$$x(n,e) = - \sum_1^{2M} c_1 x(n-1,e) + w(n,e) + \sum_1^{2M} c_1 w(n-1,e).$$

Dies ist offensichtlich der Sonderfall eines ARMA-Prozesses, bei dem die entsprechenden AR- und MA-Koeffizienten gleich sind. Ein solcher Prozeß kann nicht allein durch Formfilterung aus einem "Weißen Prozeß" erzeugt werden, vielmehr müssen - wie schon gesagt worden ist - zur Festlegung der Amplituden und Phasen der harmonischen Anteile geeignete Anfangsbedingungen vorgegeben werden. Bezüglich des "Weißen Prozesses" $w(n,e)$ ist die Übertragungsfunktion natürlich $H(z) = 1$.

In diesem Abschnitt sind verschiedene Modelle für diskrete Parameterprozesse eingeführt worden, die zum Teil als Grundlage für die im 12. Abschnitt dargestellten parametrischen Spektralschätzverfahren benötigt werden. Bevor jedoch die analogen und digitalen Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte diskutiert werden, soll im nächsten Abschnitt auf die Erzeugung diskreter Parameterprozesse durch Abtastung kontinuierlicher Prozesse und auf die Zusammenhänge zwischen den beiden eingegangen werden.

8. Erzeugung diskreter Parameterprozesse durch Abtasten

Für die Verwendung digitaler Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte von kontinuierlichen stochastischen Parameterprozessen werden Folgen von diskreten Werten dieser Prozesse benötigt. Dazu wird eine kontinuierliche Musterfunktion abgetastet, wobei die Abtastzeitpunkte entweder äquidistant oder stochastisch gewählt werden können. Das üblicherweise verwendete Verfahren ist die äquidistante Abtastung, die sich einerseits sehr einfach realisieren läßt und andererseits günstige Eigenschaften hinsichtlich der digitalen Signalverarbeitung aufweist. In diesem Zusammenhang ist vor allem die Einsatzmöglichkeit des FFT-Algorithmus¹ für die Berechnung diskreter FOURIER-Transformationen und Faltungssummen zu erwähnen. Diesen Vorteilen steht das Problem der Wahl des "richtigen" Abtastintervalls gegenüber. Wählt man die Abtastfrequenz zu hoch, so erhält man stark miteinander korrelierte und damit redundante Daten, wodurch der Rechenaufwand und die damit verbundenen Kosten unnötig vergrößert werden. Sehr viel unangenehmer ist jedoch, wie im folgenden gezeigt wird, der Fall, daß die Abtastfrequenz zu klein gewählt wird, so daß es zu "Spektralüberlappungen" kommt.

Dieses Problem wiegt dann besonders schwer, wenn vor der Durchführung der Spektralanalyse, für die das abgetastete Signal ja erst dienen soll, keine Information bezüglich einer oberen Bandbegrenzung vorhanden ist.

Diese Schwierigkeiten können dadurch umgangen werden, daß anstelle der äquidistanten eine "stochastische" Abtastung verwendet wird, wobei die Abtastzeitpunkte einen sogenannten POISSONschen Punktprozeß bilden. Abgesehen davon, daß die Realisierung einer solchen Abtastung an sich schon aufwendiger ist, liegt der Hauptnachteil gegenüber der äquidistanten Abtastung darin, daß der numerische Aufwand für die Berechnung von Schätzwerten der spektralen Leistungsdichte unverhältnismäßig viel größer wird. Dies dürfte auch der Grund dafür sein, daß sich die Spektralschätzverfahren auf der Grundlage einer POISSON-Abtastung in der Praxis nicht durchgesetzt haben.

8.1 Das Spektrum einer äquidistant abgetasteten Funktion

Die folgenden Überlegungen sollen am Beispiel der spektralen Leistungsdichte als FOURIER-Transformierte der Kovarianzfunktion eines stationären Prozesses durchgeführt werden. Dafür sprechen zwei Gründe: zum einen kann der Einfluß der Abtastfrequenz auf das Leistungsdichtespektrum als die hier interessierende Spektralgröße unmittelbar deutlich gemacht werden, zum anderen werden einige der anfallenden Ergebnisse im nächsten Abschnitt benötigt.

Zunächst geht es jedoch um die Frage, wie das Spektrum

$$S_X^*(\lambda) \equiv C_X^*(e^{j2\pi\lambda}) = \sum C_X^*(k) e^{-j2\pi\lambda k}, \quad -\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{1}{2} \quad (8.1)$$

der periodisch abgetasteten Kovarianzfunktion

$$c_X(k\Delta\tau) \equiv C_X^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} C_X^*(e^{j2\pi\lambda}) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda \quad (8.2)$$

mit dem Spektrum

$$S_X(f) = \int C_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad -\infty < f < \infty \quad (8.3)$$

der "kontinuierlichen" Kovarianzfunktion $c_X(\tau)$ zusammenhängt. Im Hinblick auf eine saubere Unterscheidung werden hier die durch Abtastung gewonnenen Funktionen und die zugehörigen Spektren mit dem Symbol * versehen.

Ausgehend von der zu Gl.(8.3) gehörenden Umkehrrelation

$$c_X(\tau) = \int S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

erhält man für $\tau = k \Delta\tau$

$$C_X^*(k) = c_X(k\Delta\tau) = \int S_X(f) e^{j2\pi f k \Delta\tau} df.$$

Dieses Integral kann als unendliche Summe von Integralen über aneinanderstoßende Intervalle der Länge $1/\Delta\tau$ dargestellt werden

$$C_X^*(k) = \sum_{(2n-1)/2\Delta\tau}^{(2n+1)/2\Delta\tau} \int S_X(f) e^{j2\pi f k \Delta\tau} df,$$

woraus sich über die Variablentransformation $f = v + n/\Delta\tau$

$$C_X^*(k) = \sum_{-1/2\Delta\tau}^{1/2\Delta\tau} \int S_X(v + \frac{n}{\Delta\tau}) e^{j2\pi v k \Delta\tau} e^{j2\pi n k} dv \quad (8.4)$$

ergibt. Die Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration ergibt

$$C_X^*(k) = \int_{-1/2\Delta\tau}^{1/2\Delta\tau} [\sum S_X(v + \frac{n}{\Delta\tau})] e^{j2\pi v k \Delta\tau} dv,$$

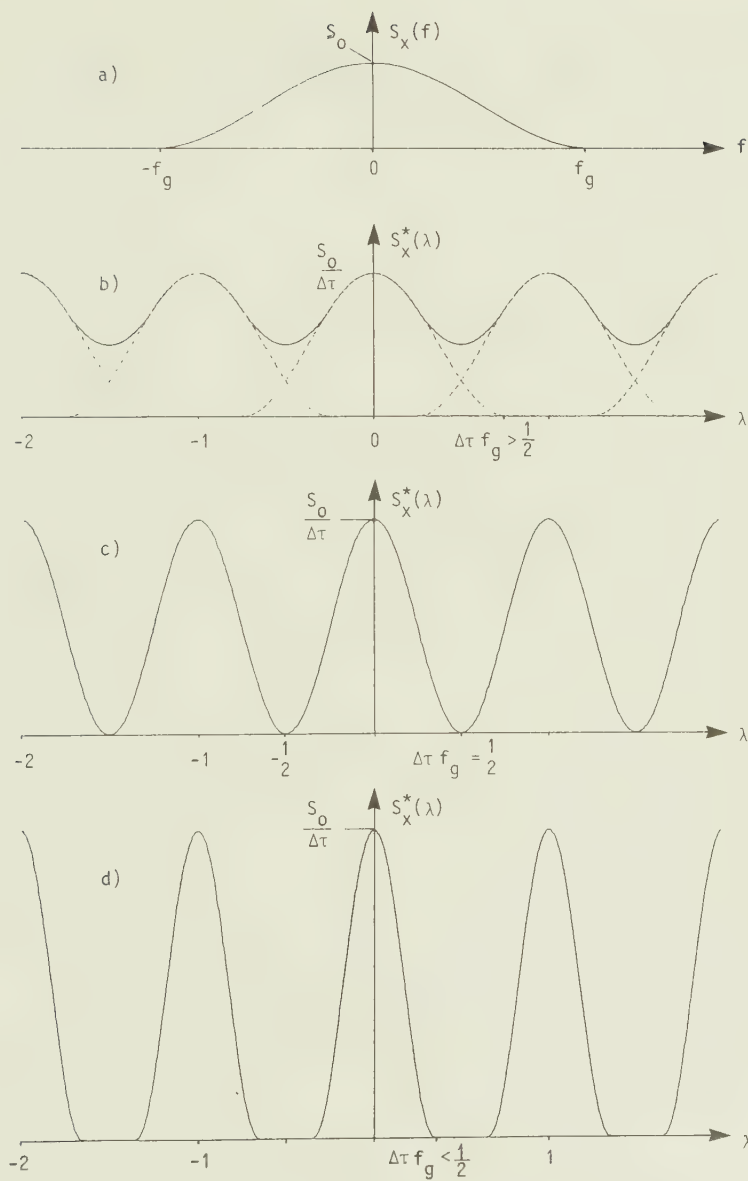


Bild 8.1

weil die zweite Exponentialfunktion unter dem Integral (8.4) für alle ganzzahligen k und n gleich 1 ist, so daß die Substitution $v\Delta\tau = \lambda$ schließlich auf

$$c_x^*(k) = \int_{-1/2\Delta\tau}^{1/2\Delta\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x(\lambda + \frac{n}{\Delta\tau}) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda$$

führt. Vergleicht man dieses Ergebnis mit Gl.(8.2), so erkennt man mit Gl.(6.4)

$$C_x^*(e^{j2\pi\lambda}) \equiv S_x^*(\lambda) ,$$

den gesuchten Zusammenhang zwischen dem Spektrum der abgetasteten Kovarianzfunktion und dem Originalspektrum

$$S_x^*(\lambda) = \frac{1}{\Delta\tau} \sum S_x(\frac{\lambda}{\Delta\tau} + \frac{n}{\Delta\tau}) . \quad (8.5)$$

Abgesehen von dem auf Grund der Frequenzstauchung zwangsläufigen Maßstabsfaktor $1/\Delta\tau$ wird das Spektrum $S_x^*(\lambda)$ der abgetasteten Kovarianzfunktion aus der Überlagerung der um $n/\Delta\tau$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, verschobenen Originalspektren gebildet. Dieser Zusammenhang soll anhand von Bild 8.1 verdeutlicht werden. Dazu zeigt Bild a das ursprüngliche Spektrum $S_x(f)$ und in den Teilbildern b,c,d ist jeweils $S_x^*(\lambda)$ für unterschiedliche Abtastintervalle $\Delta\tau$ dargestellt. Für den Fall, daß $\Delta\tau$ zu groß ist, Bild b, überlappen sich die gegeneinander verschobenen Spektren, so daß auf Grund der Symmetrieeigenschaft der Leistungsdichte der Eindruck entsteht, als würden höherfrequente Anteile von $S_x(f)$ in Bereiche niedrigerer Frequenzen gespiegelt werden. Dieser Effekt, bei dem höhere Frequenzanteile die "Identität" von niedrigen Frequenzen annehmen, wird im Englischen nach einem Vorschlag von J.W. TUKEY /142/ mit "aliasing" bezeichnet. In Ermangelung eines äquivalenten deutschen Ausdrucks für diesen Begriff wird im folgenden die Bezeichnung "Alias-Effekt" verwendet, die auch im Zusammenhang mit nichtperiodischen Abtastverfahren sinnvoll gebraucht werden kann, wenn die Spektren $S_x^*(\lambda)$ nicht mehr gemäß Gl.(8.5) aus "Wiederholungen" von $S_x(f)$ bestehen. Ein sehr früher Hinweis auf dieses Phänomen findet sich in dem schon erwähnten Buch von K. STUMPF / 82, S.45/ aus dem Jahre 1937.

Wie in Verbindung mit den Bildern 8.1c und d zu erkennen ist, tritt dieser Alias-Effekt auf, wenn

$$\Delta\tau f_g > \frac{1}{2}$$

beziehungsweise die Abtastfrequenz $1/\Delta\tau$ kleiner als die sogenannte NYQUIST-Frequenz f_N ist

$$f_{ab} = \frac{1}{\Delta\tau} < 2 f_g = f_N .$$

Es läßt sich zeigen, daß dem Alias-Effekt im Frequenzbereich eine sehr vor-
dergründige Erklärung im Zeitbereich gegenübersteht. Nähert man nämlich die
WIENER-KHINTCHINE-Beziehung

$$S_X(f) = \int c_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

durch die Summe

$$\tilde{S}_X(f) = \Delta\tau \sum c_X(k\Delta\tau) e^{-j2\pi f k\Delta\tau} = \Delta\tau S_X^*(f\Delta\tau)$$

an, so ergibt sich mit Gl.(8.5)

$$\tilde{S}_X(f) = \sum S_X\left(f + \frac{n}{\Delta\tau}\right),$$

und man erkennt, daß der Fehler bei der Approximation des Integrals gleich
dem Fehler auf Grund des Alias-Effektes ist!

Dieses Ergebnis stellt im Prinzip eine Frequenzbereichsversion des Abtast-
theorems von C.E. SHANNON dar, denn offensichtlich kann das Spektrum einer
kontinuierlichen Funktion nur dann aus äquidistanten Abtastwerten eindeutig
gewonnen werden, wenn die Abtastfrequenz größer oder gleich der NYQUIST-
Frequenz ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß überhaupt eine obere Grenzfrequenz f_g existiert, so daß

$$S_X(f) = 0 \quad \text{für } |f| > f_g . \quad (8.6)$$

In diesem Fall kann darüber hinaus die kontinuierliche Funktion, hier $c_X(\tau)$,
aus den äquidistanten Abtastwerten rekonstruiert werden, und es gilt die Inter-
polationsformel

$$c_X(\tau) = \sum c_X(n\Delta\tau) \cdot \text{sin}\pi\left(\frac{\tau}{\Delta\tau} - n\right) \quad (8.7)$$

mit

$$\text{sin}\pi t = \frac{\text{sin}\pi t}{\pi t} .$$

Wenn das Spektrum $S_X(f)$ der Kovarianzfunktion $c_X(\tau)$ bandbegrenzt ist, so
daß Gl.(8.6) gilt, dann ist offensichtlich auch

$$S_X(f) e^{-j2\pi f\tau_0} = \sum c_X(\tau - \tau_0) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

bandbegrenzt in $-f_g \leq f \leq f_g$, und $c_x(\tau - \tau_0)$ kann entsprechend Gl.(8.7) in der Form

$$c_x(\tau - \tau_0) = \sum c_x(n\Delta\tau - \tau_0) \sin\left(\frac{\tau}{\Delta\tau} - n\right) \quad (8.8)$$

dargestellt werden. Daraus folgt über eine einfache Variablentransformation die Darstellung

$$c_x(\tau) = \sum c_x(n\Delta\tau - \tau_0) \sin\left(\frac{\tau + \tau_0}{\Delta\tau} - n\right); \quad (8.9)$$

diese Ergebnisse werden im folgenden Abschnitt benötigt.

8.2 Äquidistante Abtastung eines stationären Prozesses

Die bisherigen Aussagen bezogen sich auf die deterministische Funktion $c_x(\tau)$ und ihr Spektrum. Nun basieren die üblichen digitalen Spektralschätzverfahren nicht auf der Abtastung einer analog gemessenen Kovarianzfunktion, sondern gehen vielmehr unmittelbar von den Abtastwerten einer Musterfunktion des zu analysierenden Prozesses aus. Damit stellt sich die Frage, ob auch ein kontinuierlicher Parameterprozeß $x(n, e)$ in einer zu Gl.(8.7) entsprechenden Form dargestellt werden kann. Mit anderen Worten heißt das: Gibt es einen durch Abtastung entstehenden diskreten Prozeß $x^*(n, e) = x(n\Delta t, e)$, der dieselbe Information enthält wie der kontinuierliche Parameterprozeß $x(t, e)$.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß ein Prozeß $x(t, e)$, dessen spektrale Leistungsdichte $S_x(f)$ gemäß Gl.(8.6) bandbegrenzt ist, für $1/\Delta t \geq 2f_g$ in der Form

$$x(t, e) = \sum x(n\Delta t, e) \cdot \sin\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right) \quad (8.10)$$

dargestellt werden kann, wobei die Summe als Grenzwert im quadratischen Mittel zu interpretieren ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß der gewöhnliche Grenzwert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left[x(t, e) - \sum_{-N}^N x(n\Delta t, e) \sin\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right) \right]^2 = 0 \quad (8.11)$$

ist. Bezeichnet man die Summe in Gl.(8.11) mit $s_N(t, e)$ bzw. für $N \rightarrow \infty$ mit $s(t, e)$, so gilt die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{E} [x(t, e) - s_N(t, e)]^2 &= \mathcal{E} [x(t, e) - s_N(t, e)] x(t, e) - \\ &\quad - \mathcal{E} [x(t, e) - s_N(t, e)] s_N(t, e), \end{aligned}$$

und der Beweis läuft darauf hinaus zu zeigen, daß jeder der beiden Erwartungswerte auf der rechten Seite für sich verschwindet.

Zunächst ist offensichtlich

$$\mathcal{E}[x(t,e) - s(t,e)] x(t,e) = c_x(0) - \sum c_x(n\Delta t - t) \sin\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right).$$

Wie man aus Gl.(8.9) mit $\tau = 0$ und $\tau_0 = t$ entnehmen kann, ist die rechte Seite gleich Null.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[x(t,e) - s(t,e)] x(m\Delta t, e) &= c_x(t - m\Delta t) - \\ &- \sum c_x(n\Delta t - m\Delta t) \sin\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right), \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite wegen Gl.(8.8) mit $\tau = t$ und $\tau_0 = m\Delta t$ ebenfalls gehen Null geht. Das heißt, daß $x(m\Delta t, e)$ für beliebige m orthogonal zu $[x(t,e) - s(t,e)]$ ist. Damit ist auch $s(t,e)$ als Linearkombination der Zufallsvariablen $x(m\Delta t, e)$ orthogonal zu $[x(t,e) - s(t,e)]$ und die Gültigkeit von Gl.(8.11) ist bewiesen.

Dieses Ergebnis stellt offenbar eine Erweiterung des Abtasttheorems für deterministische Signale auf stochastische Prozesse dar. In Verbindung mit den Ausführungen im vorigen Abschnitt kann daraus gefolgert werden, daß die spektrale Leistungsdichte eines kontinuierlichen Prozesses $x(t,e)$ aus einem daraus durch Abtasten erhaltenen diskreten Prozeß $x^*(n,e) = x(n\Delta t, e)$ gewonnen werden kann, wenn der Prozeß $x(t,e)$ bandbegrenzt ist und die Abtastfrequenz $1/\Delta t$ größer oder gleich der NYQUIST-Frequenz $f_N = 2f_g$ ist.

Wie gezeigt worden ist, kann unter diesen Voraussetzungen auch das Leistungsdichtespektrum $S_x(f)$ des kontinuierlichen Prozesses $x(t,e)$ eindeutig aus der Kovarianzfolge $c_x^*(k)$ des abgetasteten Prozesses bestimmt werden, weil es zu keiner Überlappung mit den periodischen Wiederholungen des Spektrums kommt und somit auch keine Alias-Spektren entstehen.

Offensichtlich sind die Forderungen an die Abtastfrequenz hinsichtlich der Bestimmung des Spektrums $S_x(f)$ aus den Abtastwerten einerseits und der Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals andererseits im Falle der äquidistanten Abtastung gleichwertig. Diese Äquivalenz gilt bei komplizierteren Abtastverfahren, die mit nicht äquidistanten Intervallen arbeiten, nicht mehr.

Im allgemeinen wird für die Berechnung des Spektrums weniger Information benötigt als für die Rückgewinnung des Prozesses selbst.

III Analoge und digitale Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Verfahren zur Schätzung des Leistungsdichtespektrums dargestellt und bezüglich ihrer statistischen Eigenschaften untersucht. Zuvor soll jedoch auf einige allgemeinere Fragen eingegangen werden, z.B. wie man Schätzfunktionen für statistische Kenngrößen und speziell für die spektrale Leistungsdichte konstruieren kann und nach welchen Kriterien diese Schätzfunktionen beurteilt werden können. Außerdem wird ausführlich auf das Periodogramm und seine Bedeutung für die Entwicklung der Spektralschätzverfahren eingegangen.

9. Einführende Bemerkungen zu den Spektralschätzverfahren

Den Ausgangspunkt für die Darstellung und Untersuchung der verschiedenen Methoden zur Schätzung des Leistungsdichtespektrums bilden endliche Signalabschnitte der Länge T , die als Teil von Musterfunktionen mittelwertfreier stationärer stochastischer Prozesse mit kontinuierlicher Parametermenge $\mathcal{T} = \{t; -\infty < t < \infty\}$ angesehen werden können. Die im Zusammenhang mit den digitalen Spektralschätzverfahren benötigten Signalfolgen werden durch äquidistante Abtastung aus den kontinuierlichen Signalabschnitten gewonnen. Für die Untersuchung der statistischen Eigenschaften müssen dann die unterlegten diskreten Parameterprozesse ebenfalls durch Abtasten aus den kontinuierlichen Zeitprozessen abgeleitet werden.

Für den Fall der äquidistanten Abtastung muß dabei sichergestellt werden, daß kein Alias-Effekt auftritt, vgl. Abschnitt 8.1. Die dazu erforderlichen Maßnahmen richten sich danach, ob gewisse a priori-Information über die Bandbreite f_g des zu analysierenden Prozesses vorhanden ist oder nicht. Wenn f_g näherungsweise bekannt ist, sollte man eine Abtastfrequenz

$$f_{ab} = \frac{1}{\Delta t} = \alpha 2 f_g$$

wählen, wobei $\alpha = 1,5 \dots 2$ einen zusätzlichen Sicherheitsfaktor darstellt. Falls f_g nicht bekannt ist, muß man sich eine obere Schranke f_s , bis zu der das Spektrum geschätzt werden soll, vorgeben und das analoge Signal durch ein sogenanntes Anti-Aliasing-Filter auf $|f| < f_s$ bandbegrenzen, bevor mit $f_{ab} = 2 f_s$ abgetastet wird.

In den nachfolgenden Betrachtungen bleiben die Einflüsse von Quantisierungsfehlern beim Übergang vom analogen zum diskreten Signal unberücksichtigt, so daß auch die diskreten Parameterprozesse durch Verbundverteilungsdichten gekennzeichnet werden können (vgl. Abschnitt 4.1).

Im Hinblick auf die analytische Untersuchung der Güte der verschiedenen Schätzwerte muß darüber hinaus i.a. gefordert werden, daß die unterlegten Prozesse GAUSSverteilt sind.

Daraus folgt natürlich nicht, daß die Schätzverfahren selbst nur für GAUSS-verteilte Prozesse brauchbar sind. In praktischen Anwendungsfällen ist der Verteilungscharakter der Prozesse i.a. unbekannt, so daß die auf Grund der GAUSS-Hypothese abgeleiteten Angaben über die Schätzfehler hauptsächlich als Richtwerte dienen sollen.

Die oben formulierte Einschränkung auf mittelwertfreie stationäre Prozesse beinhaltet, daß die Meßsignale vor der eigentlichen Spektralanalyse einer geeigneten Datenaufbereitung unterzogen worden sind. Dazu gehört wenigstens die Kompensation des linearen Mittelwertes und gegebenenfalls eine Korrektur von möglichen Trends. Unter dem Begriff "Trend" sind hier Instationaritäten bezüglich des linearen Mittelwertes zusammengefaßt, die z.B. auf Grund von Drifteffekten oder als Folge von Frequenzkomponenten auftreten, deren Periodendauer größer ist als die Länge T des zur Verfügung stehenden Signalauschnittes.

Ein gebräuchliches Verfahren zur Verminderung solcher Einflüsse besteht darin, die Parameter a_m in einem "Trendmodell"

$$s_M(n \Delta t) = \sum_0^M a_m (n \Delta t)^m$$

auf der Grundlage der minimalen Fehlerquadrate zu bestimmen und die Folge der Meßwerte $y(n \Delta t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, in der Form

$$x(n \Delta t) = y(n \Delta t) - s_M(n \Delta t)$$

zu bereinigen. Für $M=0$ reduziert sich dieses Verfahren auf die bloße Mittelwertkompensation, wobei sich

$$s_0(n \Delta t) = a_0 = \frac{1}{N} \sum_1^N y(l \Delta t)$$

ergibt. Wird ein linearer Trend in den Meßwerten vermutet, so erhält man für $M=1$:

$$a_0 = \frac{2(2N+1) \sum_{l=1}^N y(l\Delta t) - 6 \sum_{l=1}^N l y(l\Delta t)}{N(N-1)}$$

und

$$a_1 = \frac{12 \sum_{l=1}^N l y(l\Delta t) - 6(N+1) \sum_{l=1}^N y(l\Delta t)}{\Delta t N (N-1)(N+1)},$$

wozu angemerkt werden soll, daß für die Regression ein Meßwert verloren geht, wenn man den Index l nicht von 1 bis N sondern von 0 bis $N-1$ laufen läßt.

Auf eine ausführliche Darstellung der verschiedenen Verfahren zur Datenaufbereitung soll hier verzichtet werden; vgl. dazu z.B. /4/, S.288/, /21/, S.150/, /118/, S.141/.

9.1 Gewinnung und Beurteilung von Schätzwerten für die Leistungsdichte

Ein grundlegendes Problem im Bereich der statistischen Schätzverfahren besteht darin, wie man aus den gegebenen Meßdaten am besten einen Schätzwert oder genauer eine Schätzvorschrift für die interessierende Größe finden kann. Dazu sind verschiedene "objektive" Verfahren zur Konstruktion von Parameterschätzungen entwickelt worden /11, 12, 40/, von denen die sogenannte Maximum-Likelihood (ML)-Methode, die in den Anfängen bereits auf K.F. GAUSS /64/ zurückgeht und später von R.A. FISHER /11/, S.498/ aufbereitet worden ist, wohl die größte Bedeutung erlangt hat. Für die vorliegende Aufgabenstellung, nämlich aus einem endlichen Signalausschnitt $x_T(t)$ der Länge T bzw. einer endlichen Folge von Signalwerten $x_N^*(n) = x_T(n\Delta t)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, mit $T = N \cdot \Delta t$ geeignete Schätzwerte für die spektrale Leistungsdichte oder die Kovarianzfunktion zu gewinnen, führt die ML-Methode, wie später gezeigt wird, auf nicht befriedigende Ergebnisse. Die Gründe dafür sind in der Tatsache zu sehen, daß hier nicht einzelne Parameter, sondern ganze Funktionen, nämlich $c_x(\tau)$ und $S_x(f)$, geschätzt werden sollen und daß dazu die zur Verfügung stehende Information nicht ausreichend ist. Diese Aussage bedarf einer Ergänzung: Bei den sogenannten parametrischen Schätzverfahren geht es darum, eine endliche Zahl von Modellparametern aus den Meßdaten zu bestimmen; hierzu sind eine Reihe von Ansätzen auf der Grundlage des ML-Prinzips gemacht worden. Wenn die Parameter geschätzt worden sind, ist in Verbindung mit dem zugrunde gelegten Modell auch ein Schätzwert

für das Leistungsdichtespektrum bestimmt. Dabei handelt es sich aber nicht um einen ML-Schätzwert im eigentlichen Sinn, weil keine Likelihood-Funktion in Abhängigkeit von $S_X(f)$ maximiert worden ist (vgl. Punkt 9.3.5).

Wenn es nicht möglich ist, befriedigende Schätzwerte für $S_X(f)$ auf Grund objektiver Verfahren zu gewinnen, muß man sich mit "intuitiven", mehr oder weniger willkürlich konstruierten Schätzwerten zufrieden geben, wobei es dann unerlässlich ist, ihre Güte durch objektive Kriterien zu überprüfen. Solche "intuitiven" Schätzungen können z.B. in Anlehnung an geeignete Definitionen für $S_X(f)$ oder auf Grund von Zusammenhängen mit anderen Kenngrößen, für die brauchbare Schätzwerte bekannt sind, konstruiert werden.

Dazu zwei Beispiele: Die spektrale Leistungsdichte ist ein Maß für die Leistung eines Prozesses pro Frequenzintervall. Ausgehend von dieser Definition bietet sich

$$\hat{S}_T(f;B) = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T x_F^2(t;f,B) dt$$

als Schätzwert an, wobei $x_F(t;f,B)$ das Ausgangssignal eines Bandpasses mit der Mittenfrequenz f und der Bandbreite B ist, an dessen Eingang $x_T(t)$ liegt. Diese Schätzvorschrift bildet die Grundlage für die analogen Schätzverfahren und in abgewandelter Form auch für die meisten nichtparametrischen digitalen Methoden.

Das bekannteste Beispiel für die zweite Gruppe von intuitiven Schätzwerten ist das Periodogramm $I_T(f)$, das sich in Anlehnung an die WIENER-KHINTCHINE-Beziehung zwischen $S_X(f)$ und $c_X(\tau)$ als FOURIER-Transformierte von

$$\hat{c}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} x_T(t) x_T(t+|\tau|) dt$$

als ein Schätzwert für die Leistungsdichte anbietet. Das Periodogramm ist aber, wie unter Punkt 3.2 dieses Abschnitts ausführlich gezeigt wird, ein ausgesprochen "schlechter" Schätzwert für $S_X(f)$, so daß gerade dieses Beispiel die Notwendigkeit von Beurteilungskriterien für statistische Schätzwerte deutlich macht.

Dazu ist es erforderlich, den Begriff des Schätzwertes bzw. der Schätzung etwas weiter zu fassen. Ein einzelner Schätzwert $\hat{S}_T(f)$, der für eine bestimmte Frequenz f aus einem Signalabschnitt $x_T(t)$ berechnet wird:

$$S_T(f) = \gamma_f[x_T(t)] ,$$

ist ein fester Zahlenwert. Die Frage, ob dieser Wert gut oder schlecht ist, kann nur beantwortet werden, wenn der wahre Wert $S_X(f)$ bekannt ist; in die-

sem Falle wäre aber eine Schätzung überflüssig.

Diese Problematik kann teilweise dadurch umgangen werden, daß $x_T(t)$ als Teil einer Musterfunktion eines "unterlegten" stochastischen Prozesses $x(t,e)$ interpretiert und die Schätzvorschrift $\hat{\sigma}$ auf den Ausschnitt

$$x_T(t,e) = \begin{cases} x(t,e) & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dieses Prozesses angewendet wird. Dann ist, wiederum für eine Frequenz f ,

$$\hat{S}_T(f,e) = \hat{\sigma}_f[x_T(t,e)] ,$$

eine Zufallsvariable, und die Beurteilung der Schätzung kann anhand der statistischen Eigenschaften dieser Zufallsvariablen durchgeführt werden. Der konkrete Zahlenwert $S_T(f)$ wird dabei als eine Realisierung der Zufallsvariablen $\hat{S}_T(f,e)$ angesehen.

Die statistischen Eigenschaften dieser Zufallsvariablen werden vollständig durch die Verteilungsdichtefunktion $p_{\hat{S}}(u)$ beschrieben, und man wird eine Schätzung dann als gut bezeichnen, wenn $p_{\hat{S}}(u)$ möglichst in der Nähe des wahren Wertes $S_X(f)$ konzentriert ist. So würde man auf Grund der in Bild 9.1 dargestellten Verteilungsdichten für zwei verschiedene Schätzungen

$$\hat{S}_1(e) = \hat{\sigma}_1[x_T(t,e)] \text{ und } \hat{S}_2(e) = \hat{\sigma}_2[x_T(t,e)]$$

sicherlich dem ersten Schätzverfahren den Vorzug geben, weil die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Schätzwerte in der Nähe des wahren Wertes liegen, größer ist als im zweiten Fall.

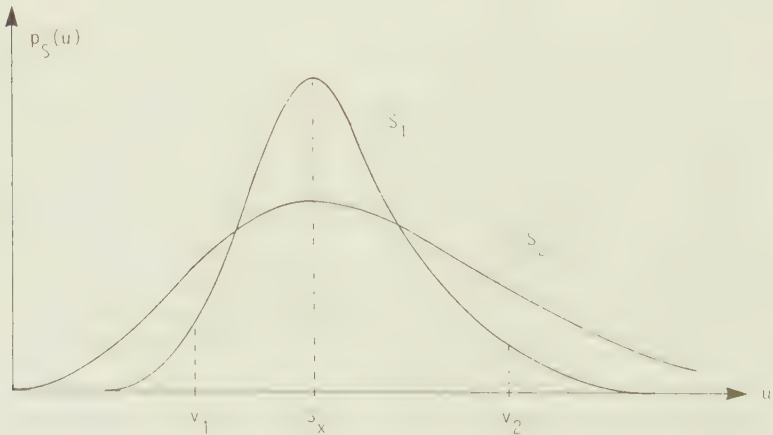


Bild 9.1

Diese Aussagen lassen sich durch die Angabe von sogenannten Vertrauensintervallen präzisieren. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß z.B. $\hat{S}_1(e)$ kleiner als v_1 bzw. größer als v_2 ist, je mit $\alpha/2$, so wird $[v_1, v_2]$ ein Vertrauensintervall für den Schätzwert $\hat{S}_1$ genannt, und

$$1 - \alpha = \mathcal{P}\{v_1 \leq \hat{S}_1(e) \leq v_2\}$$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Schätzwert in dieses Intervall fällt. Demnach ist die Güte einer Schätzung umso größer, je kleiner bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α das zugehörige Vertrauensintervall ist.

Die bisherigen Überlegungen lassen sich leider auf die meisten Schätzwerte für die Leistungsdichte nicht anwenden, weil die Verteilungsdichten $p_g(u)$ nicht bekannt sind. Eine Ausnahme macht das Periodogramm, dessen Verteilungsdichte für normalverteilte Prozesse exakt bestimmt werden kann (vgl. Punkt 3.2). In den Fällen, in denen auch keine Näherungen für $p_g(u)$, z.B. auf Grund von asymptotischen Betrachtungen, angegeben werden können, muß man sich mit einer weniger vollständigen Kennzeichnung der statistischen Eigenschaften dieser Schätzwerte zufrieden geben.

Die wichtigsten Kenngrößen zur Beurteilung von statistischen Schätzwerten basieren auf den ersten beiden Momenten der Verteilungsdichte $p_g(u)$. Es sind dies die Verschiebung (bias)

$$b \hat{S}_T(f, e) = \mathcal{E} \hat{S}_T(f, e) - S_X(f), \quad (9.1)$$

die Varianz

$$\text{var } \hat{S}_T(f, e) = \mathcal{E} [\hat{S}_T(f, e) - \mathcal{E} \hat{S}_T(f, e)]^2 \quad (9.2)$$

und der quadratische Mittelwert des Schätzfehlers

$$\begin{aligned} q \hat{S}_T(f, e) &= \mathcal{E} [\hat{S}_T(f, e) - S_X(f)]^2 \\ &= \text{var } \hat{S}_T(f, e) + b^2 \hat{S}_T(f, e). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Im allgemeinen erhält man die Verschiebung und die Varianz als Funktionen der zu schätzenden Größe. Da diese aber nicht bekannt sind, muß man sich über geeignete Normierungen mit relativen Maßen für Verschiebung, Varianz und quadratischen Mittelwert des Schätzfehlers zufrieden geben.

Die Verschiebung b gibt an, wie weit ein Schätzwert im Mittel von dem zu schätzenden Wert entfernt ist; wenn

$$b \hat{S}_T(f, e) = 0$$

ist, so nennt man die Schätzung erwartungstreu, bzw. asymptotisch erwartungstreu.

tungstreu, wenn

$$\lim_{T \rightarrow \infty} b \hat{S}_T(f, e) = 0$$

gilt. Die Varianz ist ein Maß für die "Breite" der Verteilungsdichte $p_S(u)$; sie gibt also an, wie stark die Schätzwerte um den Erwartungswert streuen.

Bei vielen Schätzwerten führt die Minimierung der Varianz auf eine Vergrößerung der Verschiebung und umgekehrt. In diesen Fällen wird zweckmäßig der quadratische Mittelwert des Schätzfehlers $q \hat{S}_T(f, e)$ als Gütemaß für die Schätzung herangezogen.

Man nennt einen Schätzwert $\hat{S}_T(f, e)$ für $S_X(f)$ konsistent, wenn er die hinreichende Bedingung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\hat{S}_T(f, e) - S_X(f)]^2 = 0 \quad (9.4)$$

erfüllt. Dazu muß ergänzend bemerkt werden, daß die ursprünglich von R.A. FISHER / 11/ angegebene Definition der Konsistenz auf der Forderung

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{W}\{|\hat{S}_T(f, e) - S_X(f)| > \epsilon\} = 0$$

basiert. Aus der TCHEBYCHEFF-Ungleichung folgt unmittelbar, daß diese Forderung schwächer ist als die Konvergenz im quadratischen Mittel (vgl. auch Bild 9.4 auf S. 89).

Die bisherigen Überlegungen laufen im Prinzip auf eine punktuelle Beurteilung der Schätzwerte $\hat{S}_T(f)$ für einzelne Frequenzen hinaus. Dieses Vorgehensweise ist keineswegs zwingend, und man könnte als globales Gütemaß z.B. das Integral über den quadratischen Mittelwert des Schätzfehlers

$$\begin{aligned} Q S_T(f, e) &= \int E[\hat{S}_T(f, e) - S_X(f)]^2 df \\ &= \int_0 q \hat{S}_T(f, e) df \end{aligned}$$

verwenden /131/. Dieses Kriterium scheint jedoch eher für Anpassungstests von Leistungsspektren geeignet zu sein, vgl. /298/, als für die Beurteilung von Spektralschätzwerten. Ein anderer, von E. PARZEN /135/, stammender Vorschlag verwendet den Maximalwert des Schätzfehlers i.q.M. als Beurteilungskriterium. Alle diese Gütemaße setzen voraus, daß die Verschiebung und die Varianz für den jeweiligen Schätzwert $S_T(f)$ als Funktionen von f bestimmt werden können. Das ist für die nichtparametrischen Schätzverfahren

zumindest näherungsweise immer möglich, nicht aber für die parametrischen Schätzungen, bei denen sich der Spektralschätzwert indirekt über das zugrundegelegte Modell aus Schätzwerten für die Modellparameter ergibt. Dies ist ein gravierender Nachteil der parametrischen Schätzverfahren, der aber teilweise dadurch aufgehoben wird, daß für die besonders wichtigen ME/AR-Schätzwerte asymptotische Näherungen für Verschiebung und Varianz angegeben werden können.

Die Beurteilung der nichtparametrischen Schätzverfahren in den folgenden Abschnitten wird sich im wesentlichen auf die Überprüfung der Erwartungstreue und der Konsistenz stützen, wozu die Verschiebung und die Varianz in Abhängigkeit von f und T sowie anderen verfahrensspezifischen Kenngrößen analytisch bestimmt werden. Im Prinzip können daraus die übrigen Gütemaße ebenfalls berechnet werden.

9.2 Schätzwerte für die Kovarianzfunktion

Für verschiedene Spektralschätzverfahren werden Schätzwerte für die Kovarianzfunktion benötigt. So wird bei den sogenannten indirekten Schätzungen $\hat{S}_T(f)$ als FOURIER-Transformierte eines gewichteten Kovarianzschätzwertes bestimmt, und die Berechnung der Parameter von AR-Spektralschätzwerten nach der YULE-WALKER-Methode geht von einem Schätzwert für die Kovarianzmatrix aus.

Im folgenden werden zwei gebräuchliche Schätzwerte miteinander verglichen, wobei die Darstellung im Hinblick auf die Verwendung in digitalen Schätzverfahren für diskrete Meßsignale $x_N(n) = x_T(n\Delta t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ und $T = N\Delta t$, durchgeführt wird.

Für die Untersuchungen wird gefordert, daß der Prozeß $x(t, e)$ ergodisch bzgl. der Kovarianzfunktion ist, also

$$c_X(\tau) = \mathcal{E}x(t, e)x(t+\tau|, e) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t, e)x(t+\tau|, e) dt$$

für fast jedes $e \in \mathcal{E}$ gilt. Das heißt mit anderen Worten, daß die Wahrscheinlichkeit, eine Musterfunktion zu finden, für die der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau|) dt$$

nicht gegen $c_X(\tau)$ konvergiert, gleich Null ist.

Damit bietet sich als "intuitiver" diskreter Schätzwert für die Kovarianzfunktion

$$\hat{c}_x(k, \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1-|k|} x_T(n \Delta t) x_T(n \Delta t + |k| \Delta t)$$

bzw.

$$\hat{c}_1(k) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1-|k|} x_N(n) x_N(n + |k|) \quad (9.5)$$

an, wobei sich die obere Grenze $N-1-|k|$ aus der endlichen Länge der zur Verfügung stehenden Signalfolge $x_N(n)$ ergibt. Dieser Schätzwert ist nur asymptotisch erwartungstreu, denn man erhält für den Erwartungswert

$$E \hat{c}_1(k, e) = (1 - \frac{|k|}{N}) c_x(k) . \quad (9.6)$$

Auf Grund dieses Ergebnisses ist es naheliegend, einen zweiten Schätzwert

$$\begin{aligned} \hat{c}_2(k) &= \frac{N}{N-|k|} \hat{c}_1(k) \\ &= \frac{1}{N-|k|} \sum_0^{N-1-|k|} x_N(n) x_N(n + |k|) \end{aligned} \quad (9.7)$$

einzuführen, der offensichtlich erwartungstreu ist.

Auf Grund der GAUSS-Hypothese erhält man für die Varianzen

$$\text{var } \hat{c}_1(k, e) = \frac{1}{N^2} \sum_{l=0}^{N-1-|k|} (N-|k|-|l|) [c_x^2(1) + c_x(1+|k|) c_x(1-|k|)] \quad (9.8)$$

bzw.

$$\text{var } \hat{c}_2(k, e) = \frac{N}{(N-|k|)^2} \text{var } \hat{c}_1(k, e). \quad (9.9)$$

Unter der Voraussetzung, daß $c_x(k)$ quadratisch summierbar ist, was für kovarianz-ergodische stochastische Prozesse erfüllt ist, folgt aus den Gln. (9.8) und (9.9), daß beide Schätzungen konsistent sind. Für den Schätzwert $\hat{c}_1(k)$ muß dabei zusätzlich beachtet werden, daß er asymptotisch erwartungstreu ist.

Da im Definitionsbereich $|k| < N$ immer $N^2/(N-|k|)^2 \geq 1$ ist, gilt

$$\text{var } \hat{c}_2(k, e) \geq \text{var } \hat{c}_1(k, e).$$

Damit stellt sich das Problem, zwischen zwei Schätzwerten entscheiden zu sollen, von denen der eine erwartungstreu, dafür aber eine größere Varianz als der andere, nur asymptotisch erwartungstreu, Schätzwert aufweist.

Zieht man deshalb als Entscheidungshilfe die quadratischen Mittelwerte der Schätzfehler heran, so läßt sich - allerdings nur anhand von Beispielen /288/, nicht aber allgemein - zeigen, daß

$$q \hat{c}_1(k, e) \leq q \hat{c}_2(k, e)$$

gilt. In Bild 9.2 sind die Zusammenhänge für den Fall eines Prozesses mit der Kovarianzfunktion $c_x(\tau) = \sigma_x^2 \exp(-a|\tau|)$ dargestellt.

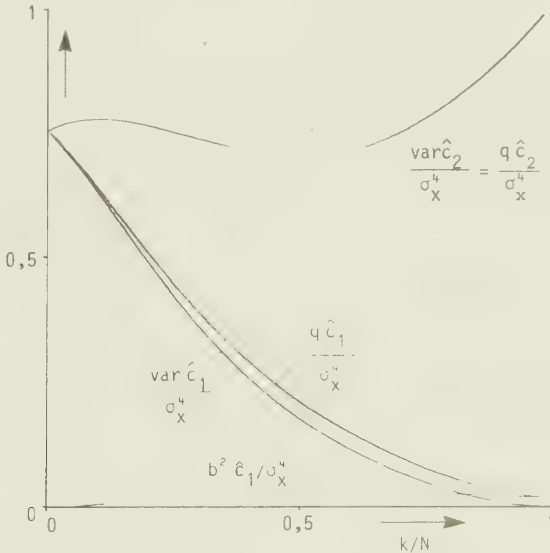


Bild 9.2

Neben den bisher betrachteten statistischen Gütemaßen soll eine weitere Eigenschaft für die Beurteilung der beiden Kovarianzschätzwerte herangezogen werden. Da das Leistungsdichtespektrum nichtnegativ ist, ist die Kovarianzfunktion positiv semidefinit, und es ist wünschenswert, daß diese Zusammenhänge auch für die jeweiligen Schätzwerte gültig bleiben.

In Analogie zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.1 läßt sich zeigen, daß der Schätzwert $\hat{c}_1(k)$ positiv semidefinit ist; für $\hat{c}_2(k)$ kann dieser Nachweis nicht erbracht werden.

Auf Grund dieser Eigenschaft und wegen des kleineren Schätzfehlers i.q.M. wird im folgenden ausschließlich mit dem Schätzwert

$$\hat{c}_1(k) \equiv \hat{c}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x_N(n) x_N(n+|k|) \quad (9.10)$$

gearbeitet.

9.3 Das Periodogramm

Das Periodogramm ist ursprünglich von A. SCHUSTER / 76,77 / eingeführt worden, um nichterkennbare periodische Anteile in gemessenen Signalen nachzuweisen. Ohne näher auf dieses Problem eingehen zu wollen, soll dazu bemerkt werden, daß SCHUSTERS Methode im wesentlichen darin besteht, anhand des Periodogramms

$$I_N(\lambda_v) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\lambda_v n} \right|^2$$

die Nullhypothese zu testen / 63/, daß $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, Musterfolge eines diskreten "Weißen Prozesses" ist. Aus der Ablehnung dieser Hypothese wird geschlossen, daß in dem Signal eine periodische Komponente mit der Frequenz λ_v enthalten ist.

Darüber hinaus hat SCHUSTER Analogiebetrachtungen zwischen dem Periodogramm und dem Spektrum von Licht angestellt / 78/, die wesentlich dazu beigetragen haben, eine Vorstellung über kontinuierliche Spektren und Periodogramme zu entwickeln. Diese Gedanken haben zum Teil ihren Niederschlag in der "Verallgemeinerten harmonischen Analyse" von N. WIENER / 88/ gefunden.

Die Bedeutung des Periodogramms für die Spektralschätzverfahren ist zweifach: Zum einen spielt es, wenn auch in modifizierter Form, eine zentrale Rolle bei einer wichtigen Klasse der zur Zeit gebräuchlichen digitalen Schätzverfahren; auf diesen Punkt wird in den entsprechenden Abschnitten ausführlich eingegangen. Zum anderen kann man etwas überspitzt sagen, daß der "Mißbrauch" des Periodogramms als Schätzwert und darüber hinaus für $N \rightarrow \infty$ auch als Definition der spektralen Leistungsdichte Anlaß und Ausgangspunkt für die Entwicklung einer eigenständigen Theorie der Spektralschätzverfahren war. Dieser Aspekt soll im folgenden ausführlicher dargestellt werden. Im Hinblick auf die Bedeutung des Periodogramms im Bereich der digitalen Spektralschätzverfahren werden die Ausführungen für diskrete Signale bzw. Prozesse mit diskreter Parametermenge durchgeführt.

9.3.1 Das Periodogramm als "natürlicher" Schätzwert für S_x

Grundlage für die Überlegungen in diesem Abschnitt ist eine Signalfolge $x_N(n)$ der Länge N , die als Ausschnitt einer Musterfolge $x(n)$ des stationären diskreten Parameterprozesses $x(n,e)$ angesehen werden soll:

$$x_N(n) = \begin{cases} x(n) & \text{für } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{für } n < 0 \text{ und } n \geq N \end{cases}$$

Das aus $x_N(n)$ gewonnene Periodogramm

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2 \quad (9.11)$$

wird von zahlreichen Autoren als der natürliche Schätzwert für die Leistungsdichte des Prozesses $x(n,e)$ bezeichnet. Dafür lassen sich verschiedene Gründe anführen:

i) In Anlehnung an die WIENER-KHINTCHINE-Beziehung (6.7) ist es naheliegend, einen Schätzwert für $S_X(\lambda)$ als FOURIER-Transformierte eines Schätzwertes der Kovarianzfolge einzuführen. Dieser Schätzwert ist das Periodogramm, denn Gl.(9.11) lautet ausführlich geschrieben

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(m) x(n) e^{-j2\pi\lambda(m-n)}$$

bzw. mit $m-n = k$

$$I_N(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{N-1-n} x(n) x(n+k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge erhält man daraus

$$\begin{aligned} I_N(\lambda) = \sum_{k=-N+1}^{-1} e^{-j2\pi\lambda k} \frac{1}{N} \sum_{n=-k}^{N-1} x(n)x(n+k) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\lambda k} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k) \end{aligned}$$

und mit der Substitution $n+k \rightarrow n$ in der ersten Summe

$$\begin{aligned} I_N(\lambda) = \sum_{k=-N+1}^{-1} e^{-j2\pi\lambda k} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1+k} x(n)x(n-k) + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\lambda k} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n)x(n+k). \end{aligned}$$

Beachtet man, daß k im ersten Term nur negative Werte annimmt, so lassen sich die beiden Summen zusammenfassen

$$I_N(\lambda) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} e^{-j2\pi\lambda k} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x(n)x(n+|k|),$$

wobei die innere Summe gemäß Gl.(9.10) gerade $\hat{c}_N(k)$ ist, und man erhält schließlich

$$I_N(\lambda) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{c}_N(k) e^{-j2\pi\lambda k} \quad (9.12)$$

Das Periodogramm ist also in völliger Analogie zur WIENER-KHINTCHINE-Relation die FOURIER-Transformierte des Schätzwertes für die Kovarianzfunktion nach Gl.(9.10).

Ergänzend sei angemerkt, daß sich der Zusammenhang zwischen dem Periodogramm und dem Schätzwert $\hat{c}_2(k)$ nach Gl.(9.7) wegen

$$\hat{c}_N(k) = \frac{N-|k|}{N} \hat{c}_2(k)$$

aus Gl.(9.12) zu

$$I_N(\lambda) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (1-\frac{|k|}{N}) \hat{c}_2(k) e^{-j2\pi\lambda k} \quad (9.13)$$

ergibt. Ohne genau auf die Definition von $\hat{c}_2(k)$ zu achten, könnte man fälschlicherweise den Term $(1-|k|/N)$ als BARTLETT-Fenster und $I_N(\lambda)$ als einen "indirekten" Schätzwert für die Leistungsdichte ansehen. Deshalb muß beim Vergleich verschiedener Arbeiten über Spektralschätzwerte auf der Basis gewichteter Kovarianzfunktionen sorgfältig auf die zugrundeliegenden Definitionen der Schätzwerte für $c_x(k)$ geachtet werden¹⁾.

ii) Der zweite Grund für die Verwendung des Periodogramms als Schätzwert von $S_x(\lambda)$ ergibt sich aus folgenden Zusammenhängen: Für die endliche Signalfolge $x_N(n)$ existiert formal die gewöhnliche FOURIER-Transformierte

$$X_N^*(e^{j2\pi\lambda}) = X_N(\lambda) = \sum_n x_N(n) e^{-j2\pi\lambda n} = \sum_n x(n) e^{-j2\pi\lambda n}.$$

1) vgl. dazu auch eine Anmerkung von J.W. TUKEY /144, S.211/.

Über das PARSEVALSche Theorem in der Form

$$\sum x_N^2(n) = \int_{-1/2}^{1/2} |X_N(\lambda)|^2 d\lambda$$

findet man einen Zusammenhang mit der spektralen Leistungsdichte $S_X(\lambda)$, wenn man beide Seiten dieser Gleichung durch N dividiert und anschließend den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ durchführt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum x_N^2(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|X_N(\lambda)|^2}{N} d\lambda,$$

denn die linke Seite ist für "kovarianz-ergodische" Prozesse gerade die Gesamtleistung $c_X(0) = \sigma_X^2$, so daß man in Verbindung mit der WIENER-KHINTCHINE-Relation schließlich

$$c_X(0) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\lambda) d\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|X_N(\lambda)|^2}{N} d\lambda \quad (9.14)$$

erhält. Diese Gleichung besagt, daß die Gesamtleistung eines Prozesses als Grenzwert des Integrals über das Periodogramm gewonnen werden kann. Für endliche N liefert die rechte Seite von Gl.(9.14) offensichtlich die Gesamtleistung des Signalabschnitts $x_N(n)$, so daß die Interpretation des Integranden

$$\frac{1}{N} |X_N(\lambda)|^2 = I_N(\lambda)$$

als Leistungsdichte von $x_N(n)$ und damit als Schätzwert für $S_X(\lambda)$ auch aus dieser Sicht zwingend erscheint.

iii) Ein dritter Grund für die Bezeichnung des Periodogramms als "natürlichen" Schätzwert für $S_X(\lambda)$ ist darin zu sehen, daß $I_N(\lambda)$ asymptotisch, d.h. für hinreichend große Signallängen N , ein Maximum-Likelihood-Schätzwert für $S_X(\lambda)$ ist. Auf diese Zusammenhänge soll jedoch erst in 9.3.5 eingegangen werden, weil dazu einige Ergebnisse der nächsten Abschnitte benötigt werden.

In zahlreichen Darstellungen wird die Reihenfolge von Integration und Grenzwertbildung in Gl.(9.14) vertauscht und dann aus der Gleichheit der beiden Integrale auf die Gleichheit der Integranden geschlossen. Die so gewonnene "Definition" der spektralen Leistungsdichte

$$S_X(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |X_N(\lambda)|^2$$

als Grenzwert eines Zeitmittelwertes ist, wie im folgenden gezeigt wird, zumindest für normalverteilte Prozesse nicht richtig.

9.3.2 Die Verteilungsdichte des Periodogramms

Den folgenden Betrachtungen wird gemäß Abschnitt 9.1 nicht mehr das Periodogramm eines einzelnen Signals nach Gl.(9.11) zugrundegelegt, sondern das Periodogramm des Prozesses $x(n,e)$

$$\begin{aligned} I_N(\lambda, e) &= \frac{1}{N} |X_N(\lambda, e)|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n, e) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Damit ist $I_N(\lambda, e)$ als Funktion von λ und e ein auf $\mathcal{L}$ definierter, stochastischer Prozeß mit der Parametermenge $\mathcal{L} = \{\lambda; -1/2 < \lambda \leq 1/2\}$ bzw. für eine bestimmte Frequenz eine Zufallsvariable. Für diese Zufallsvariable kann, wie im folgenden gezeigt wird, die Verteilungsdichte angegeben werden, aus der dann natürlich auch Erwartungswert und Varianz von $I_N(\cdot, e)$ bestimmt werden können.

Unter der Voraussetzung, daß der Prozeß $x(n, e)$ mittelwertfrei und normalverteilt ist, sind

$$U_N(\lambda, e) = \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{Re} X_N(\lambda, e) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n, e) \cos 2\pi\lambda n$$

und

$$V_N(\lambda, e) = \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{Im} X_N(\lambda, e) = \frac{-1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n, e) \sin 2\pi\lambda n$$

für eine feste Frequenz λ mittelwertfreie normalverteilte Zufallsvariable, die als Zufallsvektor

$$\underline{W}(\lambda, e) = \begin{bmatrix} U_N(e; \lambda) \\ V_N(e; \lambda) \end{bmatrix}$$

zusammengefaßt werden können. Damit läßt sich $I_N(\lambda, e)$ in der Form

$$I_N = \underline{W}^T \underline{W} = U_N^2 + V_N^2$$

darstellen, wobei aus schreibtechnischen Gründen die Abhängigkeit von e und λ nicht mehr mitgeschrieben wird.

Die Verteilungsdichte von $\underline{w}$ ergibt sich nach Gl.(4.6) zu

$$p_{\underline{w}}(\underline{u}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \underline{C}_{\underline{w}}}} e^{-\frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{C}_{\underline{w}}^{-1} \underline{u}} \quad (9.16)$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\underline{C}_{\underline{w}} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} U_N^2 & \mathcal{E} U_N V_N \\ \mathcal{E} U_N V_N & \mathcal{E} V_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_U^2 & \zeta_N^2 \\ \zeta_N^2 & \sigma_V^2 \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

Für die Elemente von $\underline{C}_{\underline{w}}$ erhält man im einzelnen:

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &= \mathcal{E} U_N^2(\lambda, e) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E} x(m, e) x(n, e) \cos 2\pi \lambda m \cos 2\pi \lambda n \\ &= \frac{1}{2N} (S_1 + S_2) \end{aligned}$$

mit ¹⁾

$$S_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_x(n-m) \cos 2\pi \lambda (n-m) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|) c_x(k) \cos 2\pi \lambda k$$

und

$$S_2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_x(n-m) \cos 2\pi \lambda (n+m) = \frac{\cos 2\pi \lambda (N-1)}{\sin 2\pi \lambda} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} c_x(k) \sin 2\pi \lambda (N-|k|),$$

$$\sigma_V^2 = \frac{1}{2N} (S_1 - S_2),$$

$$\begin{aligned} \zeta_N &= \mathcal{E} U_N(\lambda, e) V_N(\lambda, e) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} c_x(n-m) \sin 2\pi \lambda (n+m) \\ &= \frac{1}{2N} \frac{\sin 2\pi \lambda (N-1)}{\sin 2\pi \lambda} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} c_x(k) \sin 2\pi \lambda (N-|k|). \end{aligned}$$

Mit der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung (6.7) ergeben sich für $N \rightarrow \infty$ folgende Grenzwerte:

1) Im Anhang 13.1 sind verschiedene Doppelsummen der hier interessierenden Formen zusammengestellt.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_U^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_V^2 = \frac{1}{2} S_X(f) \quad \text{und} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \zeta_N = 0. \quad (9.18)$$

Real- und Imaginärteil von $X_N(\cdot, e)$ sind also asymptotisch unkorreliert und auf Grund der GAUSS-Hypothese auch statistisch unabhängig voneinander.

Nach diesen Vorüberlegungen kann die Verteilungsdichtefunktion des Periodogramms $I_N(\lambda, e) = \underline{W}^T \underline{W}$ über die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} \phi_I(v) &= \mathcal{E} e^{jv I_N(\lambda, e)} = \mathcal{E} e^{jv \underline{W}^T \underline{W}} \\ &= \iint e^{jv \underline{u}^T \underline{u}} p_{\underline{W}}(\underline{u}) d\underline{u} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \underline{C}_W}} \iint e^{jv \underline{u}^T \underline{u} - \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{C}_W \underline{u}} d\underline{u} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \underline{C}_W}} \iint e^{-\frac{1}{2} \underline{u}^T (\underline{C}_W^{-1} - j2v \underline{I}) \underline{u}} d\underline{u} \end{aligned}$$

bestimmt werden. Da die Matrix $(\underline{C}_W^{-1} - j2v \underline{I})$ symmetrisch ist und auch die Inverse existiert, läßt sich das Doppelintegral gemäß Gl.(4.7) lösen, und man erhält für die charakteristische Funktion

$$\phi_I(v) = \frac{1}{\sqrt{\det(\underline{I} - j2v \underline{C}_W)}} = (1 - j2v \lambda_1^2)^{-1/2} (1 - j2v \lambda_2^2)^{-1/2}$$

mit

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\lambda_U^2 + \lambda_V^2 \pm \sqrt{(\lambda_U^2 - \lambda_V^2)^2 + 4N} \right].$$

Auf Grund der formalen Ähnlichkeit mit der charakteristischen Funktion der χ_k^2 -Verteilung

$$\phi_{\chi^2}(v) = (1 - j2v)^{-k/2},$$

die sich für die Quadratsumme von k unabhängigen Zufallsgrößen mit einer $N(0,1)$ -Verteilung ergibt, kann man $\phi_I(v)$ als charakteristische Funktion einer verallgemeinerten χ^2 -Verteilung mit $k=2$ Freiheitsgraden ansehen.

Für die Verteilungsdichte des Periodogramms erhält man damit

$$\begin{aligned} p_I(u) &= \frac{1}{2\pi} \int \phi_I(v) e^{-jvu} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int (1 - j2v l_1)^{-\frac{1}{2}} (1 - j2v l_2)^{-\frac{1}{2}} e^{-jvu} dv. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Integrals ist geschlossen möglich /10/ und führt auf

$$p_I(u) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\alpha}{\beta^2} u} I_0\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2}} u\right) \cdot 1(u)$$

mit

$$\alpha = \sigma_U^2 + \sigma_V^2, \quad \beta^2 = 4(\sigma_U^2 \sigma_V^2 - \epsilon_N^2)$$

und $I_0(u)$ als modifizierte BESSEL-Funktion /1/.

Für den Erwartungswert dieser Verteilung ergibt sich

$$\mathcal{E} I_N(\lambda, e) = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_X(k) \cos 2\pi \lambda k \quad (9.19)$$

und für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{var} I_N(\lambda, e) &= \mathcal{E} I_N^2(\lambda, e) - \mathcal{E}^2 I_N(\lambda, e) = 2(\sigma_U^4 + \sigma_V^4 + 2\epsilon_N^2) \\ &= \left| \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_X(k) \cos 2\pi \lambda k \right|^2 + \left[\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{\sin 2\pi \lambda (N - |k|)}{N \sin 2\pi \lambda} c_X(k) \right]^2. \quad (9.20) \end{aligned}$$

Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ erhält man mit den Beziehungen (9.18) die Grenzwerte

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta = S_X(\lambda),$$

und es ergibt sich die Exponentialverteilung / 33, S.14/

$$p_{I_{\infty}}(u) = \frac{1}{S_X(\lambda)} e^{-\frac{u}{S_X(\lambda)}} 1(u)$$

mit

$$EI_{\infty}(\lambda, e) = S_X(\lambda)$$

und

$$\text{var } I_{\infty}(\lambda, e) = S_X^2(\lambda).$$

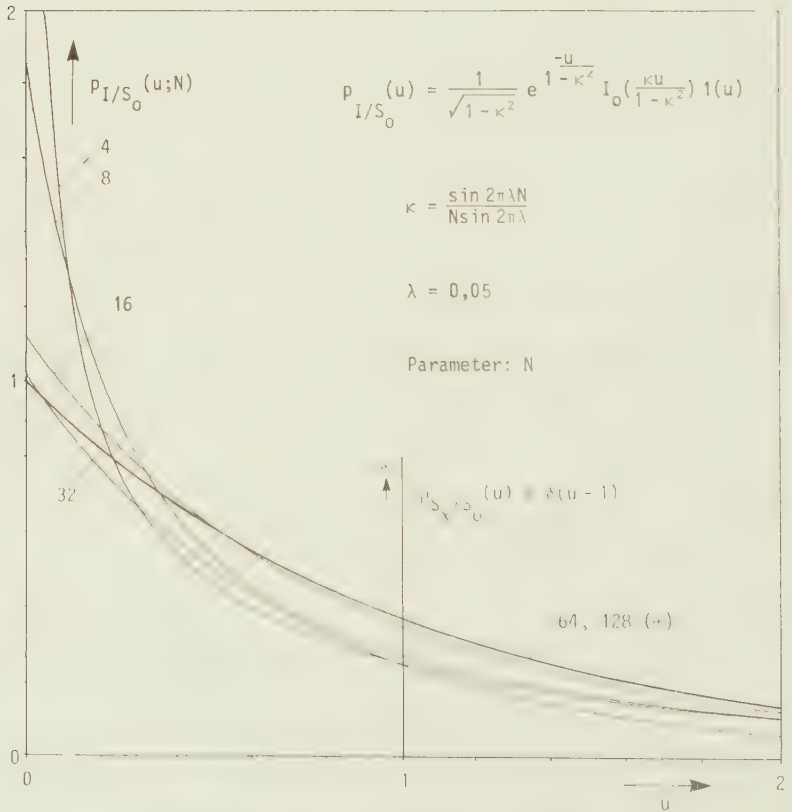


Bild 9.3

Um eine gewisse Vorstellung von diesen Ergebnissen zu vermitteln, ist in Bild 9.3 die Verteilungsdichte für den Sonderfall des "Weißen Rauschens" dargestellt. Mit $S_X(\lambda) = S_0$ und $c_X(k) = S_0 \cdot \gamma_0(k)$ erhält man

$$p_I(u) = \frac{1}{S_0 \sqrt{1-\kappa^2}} e^{-\frac{u}{S_0(1-\kappa^2)}} \cdot I_0\left(\frac{\kappa}{S_0(1-\kappa^2)} u\right) \cdot 1(u)$$

bzw. die der Abbildung zugrundeliegende normierte Form

$$p_{I/S_0}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\kappa^2}} e^{-\frac{u}{1-\kappa^2}} \cdot I_0\left(\frac{\kappa}{1-\kappa^2} u\right) \cdot 1(u),$$

wobei

$$\kappa = \frac{\sin 2\pi\lambda N}{N \sin 2\pi\lambda}$$

ist.

Aus Bild 9.3 wird zweierlei deutlich. Zum einen konvergiert die Verteilungsdichte des Periodogramms $p_{I/S_0}(u; N)$ mit wachsendem N sehr schnell gegen die Exponentialverteilung, die sich für $N \rightarrow \infty$ ergibt. Im Rahmen der Zeichengenauigkeit sind für $N \geq 64$ keine Abweichungen mehr zu erkennen. Dies rechtfertigt das Arbeiten mit asymptotischen Näherungen für den Verschiebungsfehler und die Varianz bei den nichtparametrischen digitalen Schätzverfahren im 11. Kapitel. Zum anderen konvergiert die Verteilungsdichte des Periodogramms für $N \rightarrow \infty$ aber nicht gegen die Grenzverteilung $p_{S_X/S_0}(u) = \delta(u-1)$, wie dies bei einer konsistenten Schätzung der Fall wäre. Auf diese Problematik wird im nächsten Punkt näher eingegangen. Die bisherigen Aussagen und Ergebnisse gelten zunächst nur für den Fall $0 < |\lambda| < \frac{1}{2}$. Für $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ ist $V_N(\cdot, e) = 0$, und man erhält

$$I_N(\cdot, e) \equiv U_N^2(\cdot, e) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n, e) \right]^2$$

die Gammaverteilung / 33, S.14/

$$p_I(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u} \sigma_U} e^{-\frac{u}{2\sigma_U^2}} \cdot 1(u),$$

wobei

$$\sigma_U^2 = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) c_X(k)$$

ist. Der Erwartungswert dieser Verteilung ist

$$\mathcal{E}I_N(\cdot, e) = \sigma_U^2$$

und für die Varianz ergibt sich

$$\text{var } I_N(\cdot, e) = 2\sigma_U^4$$

Im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ erhält man für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = \frac{1}{2}$

$$p_{I_\infty}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_X} e^{-\frac{u^2}{2S_X^2}} \cdot 1(u)$$

mit

$$\mathcal{E}I_\infty(\cdot, e) = S_X \text{ und } \text{var } I_\infty(\cdot, e) = 2S_X^2$$

Diese Ergebnisse erhält man auch als Grenzwerte aus den entsprechenden für $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq \pm \frac{1}{2}$. In der Tabelle 9.1 sind die statistischen Eigenschaften des Periodogramms zusammengestellt.

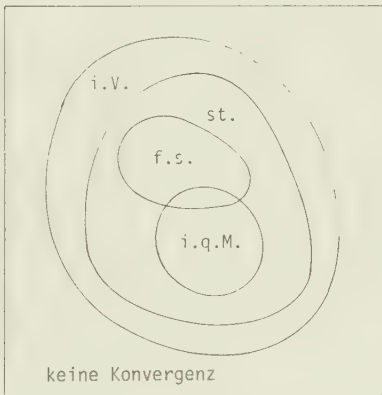
		$0 < \lambda < 1/2$	$\lambda = 0 \text{ bzw. } \lambda = 1/2$
$\lambda \neq 0, \lambda \neq \pm 1/2$	V.-Dichte	verallgemeinerte χ^2 -Verteilg.	Gammaverteilung
	$\mathcal{E}$	$\sigma_U^2(\lambda) + \sigma_V^2(\lambda)$	$\sigma_U^2(0)$ bzw. $\sigma_U^2(1/2)$
	var	$2[\sigma_U^4(\lambda) + \sigma_V^4(\lambda) + 2\tau_N^2(\lambda)]$	$2\sigma_U^2(0)$ bzw. $2\sigma_U^2(1/2)$
$\lambda = 0 \text{ bzw. } \lambda = \pm 1/2$	V.-Dichte	Exponentialverteilung	Gammaverteilung
	$\mathcal{E}$	$S_X(\lambda)$	$S_X(0)$ bzw. $S_X(1/2)$
	var	$S_X^2(\lambda)$	$2S_X^2(0)$ bzw. $2S_X^2(1/2)$

Tabelle 9.1

9.3.3 Konvergenz des Periodogramms

Für eine Frequenz $\lambda = \lambda_1$ ist $S_X(\lambda)$ ein fester Wert, dem die "entartete" Verteilungsdichte $p_{S_X}(u) = \delta(u - S_X)$ zugeordnet werden kann, Bild 9.3. Vergleicht man damit die Verteilungsdichte des Periodogramms für $N \rightarrow \infty$, so wird deutlich, daß sie nicht gegen die Dichte von $S_X(\lambda)$ konvergiert.

Nun ist aber die "Konvergenz in Verteilung" die schwächste Form überhaupt, in der eine Folge von Zufallsvariablen - hier $I_N(\lambda, e)$ mit dem Scharparameter N - gegen eine bestimmte Zufallsvariable - hier: $S_X(\lambda)$ als Konstante - konvergieren kann, vgl. Bild 9.4.



- f.s. fast sichere Konvergenz
- i.q.M. Konvergenz im quadratischen Mittel
- st. stochastische Konvergenz
- i.V. Konvergenz in Verteilung

Bild 9.4

Daraus folgt, daß das Periodogramm $I_N(\lambda, e)$ weder im quadratischen Mittel, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} |I_N(\lambda, e) - S_X(\lambda)|^2 \neq 0,$$

noch stochastisch oder in Wahrscheinlichkeit, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{W}\{|I_N(\lambda, e) - S_X(\lambda)| \geq \varepsilon\} \neq 0,$$

noch fast sicher oder mit Wahrscheinlichkeit 1, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\lambda, e) \neq S_X(\lambda) \quad \text{für fast jedes } e,$$

gegen das Leistungsdichtespektrum des Prozesses $x(n, e)$ konvergiert; es sei denn, $S_X(\lambda)$ selbst ist Null.

Diese Aussagen gelten zunächst nur für GAUSS-verteilte Prozesse $x(n,e)$. Darüber hinaus hat T. KAWATA /275/ gezeigt, daß auch das Periodogramm von nichtnormalverteilten Prozessen, für die gewisse Bedingungen bezüglich des 4. Momentes

$$M_4(k,l,m) = E x(n,e) x(n+k,e) x(n+l,e) x(n+m,e)$$

erfüllt sein müssen, für $N \rightarrow \infty$ nicht im quadratischen Mittel und folglich auch nicht stochastisch oder in Verteilung gegen die spektrale Leistungsdichte des Prozesses konvergiert.

Damit ergibt sich folgende interessante Situation: Der Schätzwert

$$\hat{c}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1-|k|} x(n) x(n+|k|)$$

für die Kovarianzfolge $c_x(k)$ ist konsistent, wogegen das in Analogie zur WIENER-KHINTCHINE-Relation aus $\hat{c}_N(k)$ gewonnene Periodogramm

$$I_N(\lambda) = \mathcal{F}\{\hat{c}_N(k)\}$$

als Schätzwert für die Leistungsdichte $S_x(\lambda)$ nicht konsistent ist. Diese Diskrepanz, die 1946 von P.J. DANIELL /60/ analytisch und später von M.S. BARTLETT /116/ auch meßtechnisch nachgewiesen worden ist, hat Anlaß zu zahlreichen Spekulationen gegeben und ist nach G.M. JENKINS /127, S.150/ der Grund und gleichzeitig der Ausgangspunkt für die Entwicklung einer eigenen Theorie der Spektralschätzungen.

9.3.4 Die Kovarianz von $I_N(\lambda_1)$ und $I_N(\lambda_2)$

Bisher sind der Erwartungswert und die Varianz von $I_N(\lambda,e)$ über die Verteilungsdichte bestimmt worden; die Aussagen basieren dabei im wesentlichen auf Summen bezüglich der Kovarianzfolge $c_x(k)$. Für die Bestimmung der Kovarianz von $I_N(\lambda_1,e)$ und $I_N(\lambda_2,e)$ wäre die Kenntnis der Verbundverteilungsdichte erforderlich. Im folgenden wird gezeigt, wie man den Erwartungswert und die Kovarianz "direkt", d.h. ohne die Verteilungsdichte, berechnen kann.

Ausgehend von Gl.(9.15) ergibt sich ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} E I_N(\lambda,e) &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1-m} c_x(m,n) d_N(m) d_N(n) e^{-j2\pi\lambda(n-m)} \\ &= \sum_m \sum_n c_x(n-m) d_N(m) d_N(n) e^{-j2\pi\lambda(n-m)} \end{aligned}$$

wobei sich die Summationen auf Grund der Schreibweise mit

$$d_N(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{für } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{für } n < 0 \text{ und } n \geq N \end{cases}$$

ins Unendliche erstrecken dürfen. Die Einführung der Datengewichtung $d_N(n)$ erfolgt aus zwei Gründen. Zum einen wird die analytische Darstellung einfacher und zum anderen können die Ergebnisse später bei der Behandlung von Schätzverfahren auf der Grundlage spezieller nichtkonstanter Datengewichtungen weitgehend übernommen werden.

Auf Grund der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung (6.6) erhält man mit

$$D_N(\lambda) = \sum d_N(n) e^{-j2\pi\lambda n} = e^{-j\pi\lambda(N-1)} \frac{\sin \pi N \lambda}{\sqrt{N} \sin \pi \lambda}$$

für den Erwartungswert

$$E I_N(\lambda, e) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(v) |D_N(\lambda-v)|^2 dv.$$

Dieses Ergebnis ist nichts anderes als die "Frequenzbereichsdarstellung" von Gl.(9.19), wobei

$$|D_N(\lambda)|^2 = \frac{\sin^2 \pi N \lambda}{N \sin^2 \pi \lambda}$$

die FOURIER-Transformierte der Korrelationsfolge

$$r_{dN}(k) = \sum d_N(n) d_N(n+|k|) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{N} & \text{für } |k| < N \\ 0 & \text{für } |k| \geq N \end{cases}$$

der Rechteck-Datengewichtung $d_N(n)$ ist.

Mit den Abkürzungen

$$I_{1,2} = I_N(\lambda_{1,2}, e), \quad x_n = x(n, e) \quad \text{und} \quad d_n = d_N(n)$$

erhält man für die Kovarianz von zwei Periodogrammwerten bei den Frequenzen λ_1 und λ_2 zunächst

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_1, I_2) &= E I_1 I_2 - E I_1 E I_2 \\ &= \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n E x_k x_l x_m x_n \cdot d_k d_l d_m d_n \cdot \\ &\quad \cdot e^{-j2\pi\lambda_1(1-k)} e^{j2\pi\lambda_2(n-m)} - E I_1 E I_2 \end{aligned}$$

und da sich für mittelwertfreie GAUSS-verteilte Prozesse das Moment

4. Ordnung in der Form

$$E x_k x_l x_m x_n = c_x(1-k) c_x(n-m) + c_x(m-k) c_x(n-l) + c_x(n-k) c_x(m-l)$$

darstellen läßt, erhält man mit den jeweiligen WIENER-KHINTCHINE-Beziehungen für die Kovarianzfolgen durch geeignetes Sortieren der Exponenten, wobei die Auswertung des ersten Summanden gerade $E I_1 E I_2$ ergibt,

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_1, I_2) = & \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_x(u) D_N(u+\lambda_1) \overline{D_N(u-\lambda_2)} du \right|^2 + \\ & + \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_x(u) D_N(u-\lambda_1) \overline{D_N(u-\lambda_2)} du \right|^2. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Die äquivalente Darstellung im Zeitbereich lautet

$$\begin{aligned} \text{cov}(I_1, I_2) = & \left[\sum_{k=1-N}^{N-1} c_x(k) \frac{\sin \pi(N-|k|)(\lambda_1+\lambda_2)}{N \sin \pi(\lambda_1+\lambda_2)} \cos \pi k(\lambda_1-\lambda_2) \right]^2 + \\ & + \left[\sum_{k=1-N}^{N-1} c_x(k) \frac{\sin \pi(N-|k|)(\lambda_1-\lambda_2)}{N \sin \pi(\lambda_1-\lambda_2)} \cos \pi k(\lambda_1+\lambda_2) \right]^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$ die schon bekannte Form (9.20) für die Varianz von $I_N(\lambda, e)$. Entsprechend erhält man aus Gl.(9.21) die zugehörige Frequenzbereichsdarstellung

$$\begin{aligned} \text{var } I_N(\lambda, e) = & \left[\int_{-1/2}^{1/2} S_x(u) D_N(u+\lambda) \overline{D_N(u-\lambda)} du \right|^2 + \\ & + \left[\int_{-1/2}^{1/2} S_x(u) |D_N(u-\lambda)|^2 du \right]^2. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Für die bisherige Ableitung sind außer der Annahme, daß der Prozeß $x(n, e)$ normalverteilt sei, keinerlei Einschränkungen gemacht worden. Entsprechend sind aber auch die Ergebnisse viel zu unübersichtlich, als daß sie als Grundlage für die Abschätzung der Varianz von digitalen Spektralschätzwerten dienen könnten.

Eine wesentliche Vereinfachung wird dadurch erreicht, daß man die Zusammenhänge für große Datenlängen N betrachtet. Dann liefert der erste Summand in Gl.(9.21) praktisch nur einen Beitrag, wenn $|\lambda_1 + \lambda_2| < 1/N$ ist,

und dementsprechend der zweite für $|\lambda_1 - \lambda_2| < 1/N$. Nimmt man deshalb ergänzend an, daß sich $S_X(\lambda)$ in Intervallen der Breite $1/N$ nur wenig ändert, so kann es in Gl.(9.21) vor die Integrale gezogen werden, und man erhält wegen

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin \pi N(u \pm \lambda_1)}{\sin \pi(u \pm \lambda_1)} \cdot \frac{\sin \pi N(u - \lambda_2)}{\sin \pi(u - \lambda_2)} du = \frac{\sin \pi N(\lambda_1 \pm \lambda_2)}{\sin \pi(\lambda_1 \pm \lambda_2)},$$

vgl. Anhang 13.5, die für große N und "glatte" Spektren gültige Darstellung

$$\text{cov}(I_1, I_2) \approx S_X(\lambda_1) S_X(\lambda_2) \frac{1}{N} [|D_N(\lambda_1 + \lambda_2)|^2 + |D_N(\lambda_1 - \lambda_2)|^2].$$

Aus diesem Ergebnis, das die Grundlage für die Abschätzung der Varianz aller nichtparametrischen Spektralschätzwerte bildet, folgt, daß Periodogrammwerte bei Vielfachen von $\Delta\lambda = 1/N$ asymptotisch unkorreliert sind.

Im folgenden wird gezeigt, daß das Periodogramm

$$I_k \equiv I_N(\lambda_k, e) = |X_N(\lambda_k, e)|^2 \quad (9.23)$$

für harmonische Frequenzen $\lambda_k = k/N$ und große Datenlängen nicht nur unkorrelierte sondern sogar statistisch unabhängige Zufallsvariable bildet. Der Grund dafür ist, daß die Spektralzerlegung des mittelwertfreien GAUSS-verteilten Prozesses $x(n, e)$ auf einen Prozeß $Z(\lambda, e)$ mit unabhängigen Inkrementen führt, vgl. Abschnitt 6.2.

Ausgangspunkt für die Überlegungen ist der Prozeß

$$X_N(\lambda, e) = \sum x(n, e) d_N(n) e^{-j2\pi\lambda n}, \quad (9.24)$$

der als FOURIER-Transformierte des zeitbegrenzten Prozesses $x(n, e) d_N(n)$ auf Grund des Abtasttheorems, vgl. Abschnitt 8.1, eindeutig durch die Zufallsvariablen $X_k \equiv X_N(\lambda_k, e)$ bei den diskreten Frequenzen $\lambda_k = k/N$, $-N/2 \leq k < N/2$ und N gerade, bestimmt ist. Diese Zufallsvariablen sind ebenfalls normalverteilt und mittelwertfrei, so daß für die Kovarianz

$$\text{cov}(X_k, X_l) = E X_k \bar{X}_l$$

gilt. Ersetzt man in Gl.(9.24) den Prozeß $x(n, e)$ durch seine Spektralzerlegung (6.8), so erhält man

$$\begin{aligned} x_N(\lambda, e) &= \sum_{-1/2}^{1/2} \int e^{j2\pi v n} dZ(v, e) d_N(n) e^{-j2\pi \lambda n} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} D_N(\lambda - v) dZ(v, e) , \end{aligned}$$

womit sich für die Kovarianz

$$\text{cov}(x_k, x_l) = \int_{-1/2}^{1/2} D_N(\lambda_k - \mu) \overline{D_N(\lambda_l - \nu)} \mathcal{E} dZ(\mu, e) \overline{dZ(\nu, e)}$$

ergibt. Dieses Ergebnis vereinfacht sich wegen der Orthogonalitätsbedingung

$$\mathcal{E} dZ(\mu, e) \overline{dZ(\nu, e)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ S_X(\nu) d\nu & \text{für } \nu = \mu , \end{cases}$$

vgl. Abschnitt 6.2, zu

$$\text{cov}(x_k, x_l) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\nu) D_N(\lambda_k - \nu) \overline{D_N(\lambda_l - \nu)} d\nu ,$$

und mit der Annahme, daß $S_X(\lambda)$ in Intervallen der Breite $1/N$ praktisch konstant ist, erhält man für große N die Näherung

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_k, x_l) &= S_X(\lambda_k) e^{-j\pi(N-1)(\lambda_k - \lambda_l)} |D_N(\lambda_k - \lambda_l)|^2 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ S_X(\lambda_k) & \text{für } k = l . \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Zufallsvariablen x_k und x_l normalverteilt sind, ergibt sich aus der nachgewiesenen asymptotischen Unkorreliertheit die statistische Unabhängigkeit. Daraus folgt unmittelbar, daß auch $I_N(\lambda_k, e)$ und $I_N(\lambda_l, e)$ als Funktionen gemäß Gl.(9.23) von unabhängigen Zufallsvariablen für große N statistisch unabhängig voneinander sind [31].

Dies ist ein wichtiges Ergebnis, denn es bildet die Grundlage dafür, daß man durch Mittelung über benachbarte Werte des Periodogramms konsistente Schätzwerte für die Leistungsdichte erhalten kann.

9.3.5 Das Periodogramm als Maximum-Likelihood-Schätzwert

Am Ende von Punkt 9.3.1 ist darauf hingewiesen worden, daß das Periodogramm für große Signallängen N ein Maximum-Likelihood (ML)-Schätzwert für $S_x(\lambda)$ ist. Dies läßt sich mit einigen Zwischenergebnissen des voranstehenden Abschnitts sehr einfach zeigen.

Ausgangspunkt ist die Verbundverteilungsdichte für Real- und Imaginärteil des Prozeß-Periodogramms nach Gl.(9.16)

$$p_{\underline{w}}(u) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \underline{C}_w}} e^{-\frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{C}_w^{-1} \underline{u}},$$

wobei die Kovarianzmatrix $\underline{C}_w$ in Verbindung mit den Beziehungen (9.18) für große N die "asymptotische" Form

$$\underline{C}_w \cong \begin{bmatrix} \frac{S_x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{S_x}{2} \end{bmatrix}$$

annimmt.

Werden in diese Funktion anstelle der unabhängigen Veränderlichen u_1 und u_2 die Meßdaten $x(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ über

$$u_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos 2\pi \lambda n$$

und

$$v_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin 2\pi \lambda n$$

eingesetzt und S_x als neue unabhängige Veränderliche interpretiert, so erhält man die sogenannte Likelihood-Funktion

$$L(S_x) \cong \frac{1}{\pi S_x} e^{-\frac{u_N^2 + v_N^2}{S_x}} = \frac{1}{\pi S_x} e^{-\frac{I_N}{S_x}} \quad (9.25)$$

bzw. durch Logarithmieren

$$l(S_x) = \ln L(S_x) \cong -\ln \pi - \ln S_x - \frac{I_N}{S_x}. \quad (9.26)$$

Das ML-Prinzip besagt nun / 11 /, daß man denjenigen Wert $S_x = S_x$ als Schätzwert wählen soll, für den $l(S_x)$ und damit auch $L(S_x)$ maximal werden. Durch Differentiation von Gl.(9.26) nach S_x erhält man damit für große N , den ML-Schätzwert

$$\hat{S}_x(\lambda) = I_N(\lambda),$$

der zwar asymptotisch erwartungstreu, aber nicht konsistent ist.

Dieses Ergebnis scheint im Widerspruch zu den bekannten asymptotischen Eigenschaften von ML-Schätzwerten zu stehen, insbesondere was die Konsistenz und die asymptotische Normalverteilung anbelangt. Diese Diskrepanz rührt daher, daß in der Likelihood-Funktion (9.25) auch für große N im Grunde nur ein einziger Meßwert $I_N(\lambda)$ berücksichtigt wird. Die erwarteten asymptotischen Eigenschaften ergeben sich erst, wenn z.B. in Form von K unabhängigen Messungen für $I_N(\lambda)$ mehr Information zur Verfügung steht. In diesem Fall lautet die Likelihood-Funktion

$$L(S_x) = \frac{1}{(2\pi S_x)^K} e^{-\frac{1}{S_x} \sum_{k=1}^K I_{N,k}},$$

aus der man den konsistenten und asymptotisch normalverteilten ML-Schätzwert

$$\hat{S}_x(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{N,k}(\lambda) \quad (9.27)$$

erhält. Dieses Ergebnis stellt i.w. eine Näherung für Gl.(6.14) dar:

$$S_x(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{E} I_N(\lambda, e).$$

Vereinbarungsgemäß steht jedoch für die im folgenden betrachteten Schätzverfahren nur ein Meßsignal $x_N(n)$ der Länge N zur Verfügung, so daß die Konstruktion eines konsistenten Schätzwertes für $S_x(\lambda)$ auf Grund von Gl.(9.27) nicht ohne weiteres möglich ist. Im Prinzip bieten sich zwei Auswege an:

- i): Aufteilung des Signals $x_N(n)$ in L Teilsignale der Länge $M < N$, wobei sich die Intervalle ggf. überlappen können, oder
- ii): Durchführung einer Frequenzmittelung über benachbarte Frequenzen anstelle der Scharmittelung. Beide Möglichkeiten werden diskutiert.

9.4 Klassifizierung der Schätzverfahren

Bei dem Versuch, ein Ordnungsschema für die verschiedenen Schätzverfahren der spektralen Leistungsdichte stationärer stochastischer Prozesse aufzustellen, stößt man im wesentlichen auf drei Klassifizierungsmerkmale.

Als erstes und vordergründigstes Kriterium kann die Art der Signalverarbeitung – analog oder diskret (digital) – angesehen werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß die zu analysierenden Signale ursprünglich in analoger Form vorliegen. Unter dem Begriff "analoge" Schätzverfahren werden im folgenden auch die sogenannten analog-hybriden Methoden verstanden, bei denen nur bestimmte Teile der Messung digital durchgeführt werden.

Ein zweites Kriterium ist die Frage, ob der Spektralschätzwert direkt aus den Meßdaten bestimmt wird oder indirekt über eine Schätzung der Kovarianzfunktion bzw. der Kovarianzmatrix.

Der dritte Gesichtspunkt für eine Klassifizierung betrifft das Schätzprinzip: je nachdem, ob die Form der Schätzung unabhängig oder abhängig von dem jeweiligen Meßsignal ist, kann zwischen datenunabhängigen und datenabhängigen Schätzverfahren unterschieden werden. Im ersten Fall wird S_x durch eine bestimmte Meßvorschrift, die auch ein digitaler Algorithmus sein kann, im klassischen Sinn geschätzt. Im anderen Fall wird das Spektrum über den Umweg eines Prozeßmodells bestimmt, dessen Parameter dann aus den Meßdaten geschätzt werden müssen. Aus diesem Grund spricht man in diesem Fall auch von parametrischen Schätzverfahren im Gegensatz zu den nichtparametrischen Methoden.

In der Literatur werden die nichtparametrischen Verfahren auch als "linear" bezeichnet, weil sie angeblich nur mit linearen Operationen bezüglich des Meßsignals auskommen, und die parametrischen "nichtlinear" genannt, weil "ihr Entwurf datenabhängig ist", vgl. S. HAYKIN / 48, S.6/. Diese Bezeichnungen sind sehr unglücklich gewählt: zwar ist die FOURIER-Transformation linear, aber die Berechnung von Kovarianzschätzwerten stellt zweifellos eine nichtlineare Operation dar. Im folgenden wird deshalb die Unterscheidung nach parametrischen bzw. datenabhängigen Schätzverfahren und nichtparametrischen bzw. datenunabhängigen Verfahren bevorzugt.

In welcher Reihenfolge man die drei Klassifizierungsebenen

parametrisch	-	nichtparametrisch
analog	-	digital
direkt	-	indirekt

miteinander verbindet, ist im Grunde willkürlich. In Bild 9.5 ist ein mögliches Klassifizierungsschema dargestellt, wobei die Zahlen in den runden

Klammern auf die Kapitel verweisen, in denen die jeweiligen Schätzverfahren untersucht werden. Die Zitatangaben betreffen Methoden, auf die in der Arbeit nicht weiter eingegangen wird.

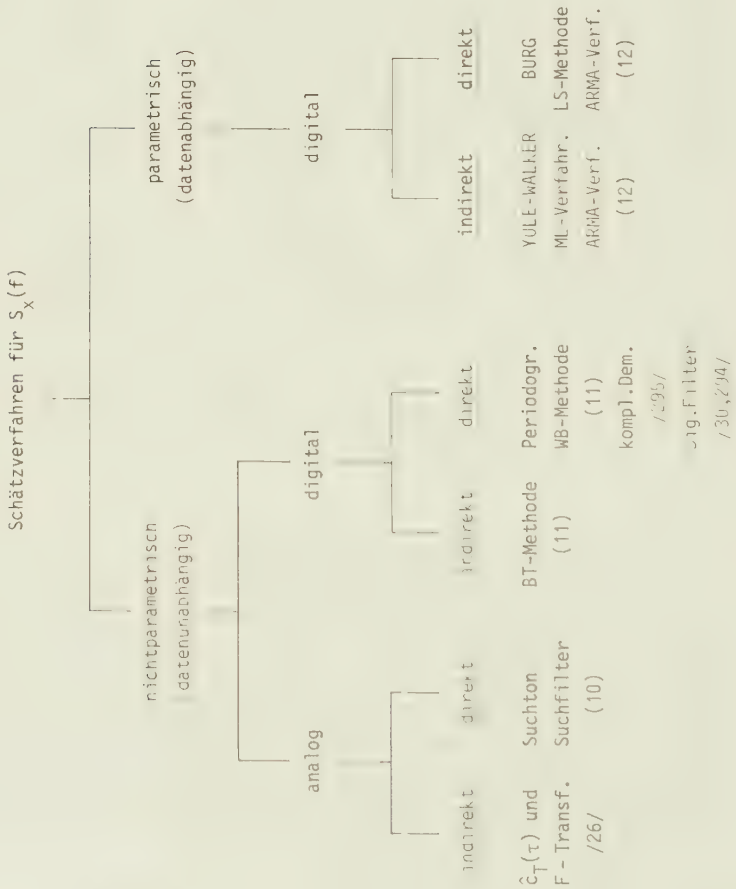


Bild 9.5

10. Analoge Messung der spektralen Leistungsdichte

An den Anfang der Betrachtungen über die verschiedenen Schätzverfahren sollen die analogen Meßmethoden gestellt werden. Dafür gibt es verschiedene Gründe:

- i. Die Darstellung der analogen Schätzverfahren ist vergleichsweise einfach und vermittelt Einsichten in grundlegende Zusammenhänge, auf die später zurückgegriffen werden kann.
- ii. Wegen der analogen Signalverarbeitung treten keine Probleme aufgrund der Abtastung (Alias-Spektren) auf.
- iii. Die Mehrzahl der im Handel befindlichen Spektralanalysatoren arbeiten analog, wie einer Marktübersicht aus dem Jahre 1984 /282/ zu entnehmen ist. Der Hauptgrund dafür ist, daß HF-Signale nach dem Stand der Technik nur mit analogen Meßverfahren analysiert werden können.
- iv. Für Laboruntersuchungen lassen sich Meßschaltungen für Schall- und Schwingungsanalysen entweder auf Analogrechnern oder mit Analogbausteinen vergleichsweise einfach erstellen.

Im folgenden werden technische Probleme, wie sie bei der Realisierung von Spektralanalysatoren auftreten, nur am Rande behandelt. Der Schwerpunkt liegt auf der Darstellung des Meßprinzips und der daraus resultierenden statistischen Fehler, wobei insbesondere auf eine weniger bekannte "symmetrische Meßanordnung" eingegangen wird, mit der die Varianz der Schätzung bei gleicher Signallänge auf etwa 50% reduziert werden kann.

10.1 Begründung und Realisierungsmöglichkeiten der Meßvorschrift

Auf Grund des Kontinuitätstheorems für charakteristische Funktionen, vgl. Abschnitt 5.2, folgt aus der Ergodizität eines Prozesses bezüglich der Kovarianzfunktion, daß der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} V_T(f) = V_X(f) = \int S_X(u) du$$

existiert.¹⁾ Daraus erhält man die Leistungsdichte

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \frac{d}{df} \lim_{T \rightarrow \infty} V_T(f) = \lim_{B \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V_T(f + \frac{B}{2}) - V_T(f - \frac{B}{2})}{B} \\ &= \lim_{B \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \hat{q}_T(f, B), \end{aligned} \quad (10.1)$$

1) Ein direkter Beweis für die Konvergenz des integrierten Spektrums wird in /100/ gebracht.



Bild 10.1

wobei

$$\hat{q}_T(f, B) = \frac{1}{T} \int_0^T x_F^2(t; f, B) dt$$

offenbar ein Schätzwert für den quadratischen Mittelwert oder die Leistung des Ausgangssignals $x_F(t; f, B)$ eines Bandpasses mit der Mittenfrequenz f und der Bandbreite B ist, an dessen Eingang eine Musterfunktion des Prozesses $x(t, e)$ liegt. Aus Gl.(10.1) folgt unmittelbar eine Schätzvorschrift für die Leistungsdichte, wenn man auf die für praktische Messungen irrealen Grenzübergänge $T \rightarrow \infty$ und $B \rightarrow 0$ verzichtet:

$$\hat{S}_T(f, B) = \frac{1}{B} \hat{q}_T(f, B) \quad (10.2)$$

und außerdem anstelle des idealen Bandpasses ein reales Filter mit dem Frequenzgang $G(f)$ zuläßt. Es stellt sich dann allerdings die Frage, wie die Filterbandbreite B zu definieren ist.

Im Hinblick darauf, daß die Schätzung von $S_x(f)$ nach Gl.(10.2) im wesentlichen auf die Messung der Leistung am Filterausgang hinausläuft, erscheint es sinnvoll, die Bandbreite hier auf der Grundlage einer Leistungsäquivalenz einzuführen. Demnach wird als äquivalente Bandbreite B eines Filters mit dem Frequenzgang $G(f)$ die Breite eines Rechteck-Filters mit der Höhe H definiert, dessen Ausgangsleistung gleich der des Filters ist, wenn beide mit "Weißem Rauschen" beaufschlagt werden. Das heißt formal

$$B = \frac{\int_0^H |G(f)|^2 df}{H^2}, \quad (10.3)$$

wobei die Höhe des Rechteckfilters entweder gleich 1 oder $|G(f)|_{\max}$ gewählt wird. Andere Definitionen basieren auf Forderungen bzgl. der Erwartungstreue oder der Varianz der Schätzung (vgl. die Punkte 10.2.1 und 10.2.2).

Im folgenden wird der Begriff "äquivalente Bandbreite" weniger als Kenngröße eines realen Filters verstanden, sondern in einer verallgemeinerten Form als charakteristische Eigenschaft eines Spektralschätzwertes selbst.

Für die Realisierung der Meßvorschrift (10.2) bieten sich verschiedene Alternativen an:

i) Zunächst ist die Messung mit einem Bandpaß zu nennen, dessen Mittenfrequenz über das gesamte zu analysierende Frequenzband variiert werden kann, Bild 10.1a. Dieses sogenannte Suchfilterverfahren wird in der Praxis selten angewandt, weil die technische Realisierung von Bandpässen mit variabler Mittenfrequenz relativ aufwendig ist.

ii) Eine andere Möglichkeit ist die multiplikative Mischung des zu analysierenden Rauschsignals mit einem harmonischen Signal, dessen Frequenz f_m

gleich der jeweiligen Meßfrequenz f^* ist. Bei diesem Prinzip wird der interessierende Frequenzbereich des Spektrums so verschoben, daß für die Analyse ein schmalbandiger Tiefpaß verwendet werden kann, Bild 10.1b). Diese Version der Suchton- oder Suchfrequenzanalyse eignet sich besonders für die Durchführung von Spektralschätzungen mit Hilfe eines Analogrechners.

iii) Kommerzielle Spektralanalysatoren arbeiten i.a. ebenfalls nach dem Suchfrequenzprinzip, wobei aber die Frequenz des harmonischen Signals wesentlich höher als die obere Signaleckfrequenz gewählt wird, so daß die Filterung mit einem festen Bandpaß durchgeführt werden kann, Bild 10.1c.

iv) Anstelle eines einzelnen Bandpasses kann eine sogenannte Filterbank eingesetzt werden, mit der das Spektrum bei verschiedenen Frequenzen gleichzeitig gemessen werden kann. Im Fall ii) der Tiefpaßanalyse kann dies dadurch erreicht werden, daß man mehrere Meßkanäle parallel aufbaut. Auf diese Möglichkeiten wird nicht näher eingegangen, weil dabei im Vergleich zur Suchfrequenzanalyse mit einem einzelnen Band- bzw. Tiefpaß keine neuen Gesichtspunkte auftreten.

10.2 Das Suchfrequenzverfahren mit Bandpaßfilterung

Die nachfolgenden Aussagen beziehen sich auf den für die Praxis besonders interessanten Fall der Suchfrequenzanalyse mit einem Bandpaß, dessen feste Mittenfrequenz $f_o = f_m + f^*$ ist, vgl. Bild 10.1c. Dieses Verfahren ist in den meisten analog arbeitenden Spektralanalysatoren realisiert, wobei die Modulation gegebenenfalls in mehreren Stufen durchgeführt wird.

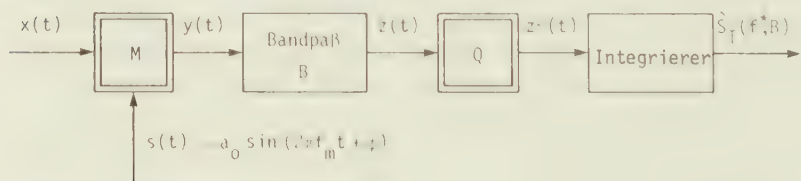


Bild 10.2

Mit den Bezeichnungen aus Bild 10.2 erhält man

$$\hat{S}_T(f^*) = \frac{2}{BT a_0} \int_0^T z^2(t) dt \quad (10.4)$$

wobei

$$z(t) = \int g(t-u) y(u) du \quad (10.5)$$

und

$$y(t) = x(t) a_0 \sin(2\pi f_m t + \phi)$$

Musterfunktionen von stationären Prozessen $z(t,e)$ bzw. $y(t,e)$ sind¹⁾.

Damit der Prozeß $y(t,e)$ stationär ist, muß das Modulationssignal $s(t)$ Musterfunktion eines stationären harmonischen Prozesses sein; dies ist der Fall, wenn der Phasenwinkel ϕ die Realisierung einer im Intervall $(0, 2\pi)$ gleichverteilten Zufallsvariablen ist. Es kann davon ausgegangen werden, daß diese Zufallsvariable und damit auch der modulierende Prozeß $s(t,e)$ statistisch unabhängig von dem Prozeß $x(t,e)$ sind. Im Prinzip ist es auch möglich, den Prozeß $y(t,e)$ durch Modulation mit einem einzelnen Signal zu konstruieren

$$y(t,e) = x(t,e) a_0 \sin(2\pi f_m t + \phi), \quad \phi = \text{const.}$$

Der so gewonnene Prozeß $y(t,e)$ ist dann zwar normalverteilt, aber nicht mehr stationär, wodurch die Untersuchung der statistischen Eigenschaften der Schätzung wesentlich erschwert wird. Aus diesem Grund wird dieser Weg im folgenden nicht weiter verfolgt.

Die zweite Annahme, daß auch das Signal $z(t)$ Musterfunktion eines stationären Prozesses sei, ist nur näherungsweise richtig. Wie in den einführenden Bemerkungen im 9. Abschnitt vereinbart worden ist, liegen den Schätzverfahren endliche Signalabschnitte der Länge T zugrunde. Das hat für den Schätzwert nach Gl.(10.4) zur Folge, daß das Signal $z(t)$ gar nicht Musterfunktion des stationären Prozesses $z(t,e)$ sondern des durch den Einschwingvorgang des Filters modifizierten Prozesses

$$\tilde{z}(t,e) = \int_0^t g(t-u)y(u,e) du$$

ist. Im Gegensatz zu Gl.(10.5) ist die untere Grenze hier 0 anstatt $-\infty$. Eine Abschätzung des Fehlers aufgrund der Vernachlässigung des Einschwingvorgangs wird im Punkt 10.5.1 durchgeführt; dabei zeigt sich, daß er im Vergleich zur Varianz der Schätzung praktisch vernachlässigt werden kann.

Aus diesem Grund werden den nachfolgenden Betrachtungen Schätzwerte der Form (10.4) zugrundegelegt, bei denen der Prozeß $z(t,e)$ am Filterausgang als stationär angenommen wird.

Der Faktor $2/a_0^2$ in Gl.(10.4) ist eingeführt worden, um den Einfluß der Modulation auf das Meßergebnis auszugleichen; er ist, wie im folgenden ge-

1) Aus schreibtechnischen Gründen wird die Abhängigkeit der Signale bzw. Prozesse und Filterkenngrößen von der Meßfrequenz f^* oder der Bandpaßmittelfrequenz $f = f_m + f^*$ während der Rechnung nicht immer angegeben.

zeigt wird, so gewählt, daß die Schätzung für den Fall eines Weißen Geräusches erwartungstreu ist.

10.2.1 Erwartungswert und Verschiebung

Auf Grund der Vernachlässigung des Einschwingvorgangs erhält man für den Erwartungswert der Schätzung nach Gl.(10.4)

$$\mathcal{E}\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{2}{B\tau a_0^2} \int_0^T \mathcal{E}z^2(t, e) dt = \frac{2}{Ba_0^2} q_z. \quad (10.6)$$

Die Bestimmung der Leistung

$$q_z = c_z(0) = \int S_z(f) df = \int |G(f)|^2 S_y(f) df$$

am Filterausgang erfolgt zweckmäßig über die Kovarianzfunktionen der beteiligten Prozesse. Dabei gilt auf Grund der statistischen Unabhängigkeit von $x(t, e)$ und $s(t, e)$

$$c_y(\tau) = c_x(\tau) \cdot c_s(\tau)$$

bzw.

$$S_y(f) = \int S_x(u) S_s(f-u) du$$

Mit

$$S_s(f) = \int c_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{a_0}{2} \int \cos 2\pi f_m \tau \cos 2\pi f\tau d\tau$$

$$= \frac{a_0}{4} [\delta(f+f_m) + \delta(f-f_m)]$$

/ 34, S.138/, folgt daraus

$$S_y(f) = \frac{a_0}{4} [S_x(f+f_m) + S_x(f-f_m)]$$

und Gl.(10.6) geht über in

$$\mathcal{E}\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{2B} \int |G(f)|^2 [S_x(f+f_m) + S_x(f-f_m)] df \quad (10.7)$$

$$= \frac{1}{B} \int |G(f)|^2 \cdot S_x(f+f_m) df$$

Aus diesem Ergebnis wird deutlich, daß $\hat{S}_T(f^*, e)$ i.a. nicht erwartungstreu ist. Für den Sonderfall eines Weißen Prozesses, d.h. $S_X(f) = \text{const.}$, erhält man eine erwartungstreu Schätzung, wenn die äquivalente Bandbreite gemäß Gl.(10.3) mit $H = 1$ zu

$$E = \int G(f) \cdot df$$

definiert wird.

Mit der Annahme, daß die zweite Ableitung von $S_X(f)$ stetig ist, erhält man eine Näherung für den Verschiebungsfehler, wenn das Analysierfilter als idealer Bandpaß mit Breite B , Höhe 1 und Mittenfrequenz $f_0 = f_m + f^*$ betrachtet wird. Damit geht Gl.(10.7) über in

$$E \hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{B} \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} S_X(f - f_m) df = \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{B/2} S_X(f^* - f) df,$$

und mit der TAYLORSchen Formel

$$S_X(f^* - f) = S_X(f^*) - f S_X'(f^*) + \frac{f^2}{2} S_X''(f^* + \theta f), \quad 0 < \theta < 1$$

folgt daraus

$$E \hat{S}_T(f^*, e) = S_X(f^*) + \frac{1}{2B} \int_{-B/2}^{B/2} f^2 S_X''(f^* + \theta f) df,$$

wobei gemäß Gl.(9.1) der zweite Term auf der rechten Seite gerade die Verschiebung $b \hat{S}_T(f^*, e)$ ist.

Wenn sich $S_X''(f)$ im Intervall $(f^* - B/2, f^* + B/2)$ nur wenig ändert, so erhält man

$$b \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{S_X''(f^*) B^2}{24} = \frac{B^2}{24} S_X''(f^*). \quad (10.8)$$

Die Güte dieser Näherung hängt demnach weniger von der absoluten Größe von S_X'' ab, wie dies in / 4, S.187/ behauptet wird, sondern vielmehr davon, wie sich S_X'' im Durchlaßbereich des Analysierfilters ändert.

Demnach kann eine Reduktion des Verschiebungsfehlers dadurch erreicht werden, daß man anhand eines "groben" Schätzwertes $\tilde{S}_T(f)$ ein Vorfilter für das Meßsignal bestimmt, dessen Frequenzgang $G_F(f)$ so gewählt wird, daß das Ausgangsspektrum $\tilde{S}_F(f)$ möglichst "glatt" ist. Aus dem Schätzwert $\tilde{S}_F(f)$ erhält man dann

$$\hat{S}_T(f) = \frac{1}{|G_F(f)|^2} \tilde{S}_F(f).$$

Im angelsächsischen Sprachgebrauch heißt diese Technik "prewhitening".

10.2.2 Varianz und Konsistenz der Schätzung

Ausgehend von Gl.(9.2) erhält man wiederum bei Vernachlässigung des Einschwingvorgangs am Ausgang des Analysierfilters für die Varianz der Schätzung nach Gl.(10.4)

$$\text{var} \hat{S}_T(f^*, e) = \frac{4}{B^2 a_0^4 T^2} \int_0^T \int_0^T \mathcal{E} z^2(s, e) z^2(t, e) ds dt - \mathcal{E}^2 \hat{S}_T(f^*, e). \quad (10.9)$$

Bei der Auswertung des Doppelintegrals stellt sich das Problem, daß der Prozeß $z(t, e)$ nicht normalverteilt ist und deshalb das 4. Moment nicht als Summe von Produkten aus Momenten 2. Ordnung dargestellt werden kann. Diese Schwierigkeit kann dadurch umgangen werden, daß man $z(t, e)$ viermal durch die Faltungsbeziehung

$$z(t, e) = \int g(t - u) x(u, e) s(u, e) du$$

ausdrückt¹⁾ und die Entwicklung dann auf das 4. Moment des normalverteilten Prozesses $x(t, e)$ anwendet.

Bezeichnet man den Erwartungswert in Gl.(10.9) mit $E(s, t)$, so erhält man mit den Abkürzungen

$$M_x = \mathcal{E} x(u_1, e) x(u_2, e) x(v_1, e) x(v_2, e)$$

1) Bei dieser Darstellung sind die Prozesse $x(t, e)$ und $s(t, e)$ auf der selben Ergebnismenge $\mathcal{E}$ definiert, so daß die statistische Unabhängigkeit zusätzlich gefordert werden muß. Eine andere Möglichkeit wäre, $x(t, e)$ und $s(t, e')$ auf verschiedenen Ergebnismengen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ zu definieren, wodurch die statistische Unabhängigkeit a priori gegeben ist.

$$M_X = c_X(u_2 - u_1)c_X(v_2 - v_1) + c_X(v_1 - u_1)c_X(v_1 - u_2) + \\ + c_X(v_2 - u_1)c_X(v_1 - u_2)$$

und

$$M_S = \mathcal{E}s(u_1, e)s(u_2, e)s(v_1, e)s(v_2, e) \\ = \frac{a_0^4}{8} [\cos 2\pi f_m(u_1 - u_2 + v_1 - v_2) + \cos 2\pi f_m(u_1 - u_2 - v_1 + v_2) + \\ + \cos 2\pi f_m(u_1 + u_2 - v_1 - v_2)]$$

zunächst

$$E(s, t) = \iiint g(t - u_1)g(t - u_2)g(s - v_1)g(s - v_2)M_X M_S du_1 du_2 dv_1 dv_2.$$

Da das Produkt $M_X^* M_S$ auf 9 Integrale führt, kann Gl.(10.9) in der Form

$$\text{var}S_T(f^*, e) = \frac{1}{2B^2 T^2} \sum_1^9 I_V - \mathcal{E}^2 S_T(f^*, e), \quad (10.10)$$

geschrieben werden, wobei sich für die Summe durch elementare trigonometrische Umformungen und geeignetes Zusammenfassen

$$\sum_1^9 I_V = 2 \left[\int_0^T I_{C-}(t, t) dt \right]^2 + \left[\int_0^T I_{C+}(t, t) dt \right]^2 + \left[\int_0^T I_{S+}^2(t, t) dt \right]^2 + \\ + 4 \int_0^T \int_0^T I_{C-}^2(s, t) ds dt + 2 \int_0^T \int_0^T I_{C+}^2(s, t) ds dt + 2 \int_0^T \int_0^T I_{S+}^2(s, t) ds dt \quad (10.11)$$

ergibt. Die Auswertung der Hilfsintegrale

$$I_{C\pm}(s, t) = \iint g(t - u)g(s - v)c_X(u - v)\cos 2\pi f_m(u \pm v) du dv$$

und

$$I_{S+}(s, t) = \iint g(t - u)g(s - v)c_X(u - v)\sin 2\pi f_m(u + v) du dv$$

wird aus Gründen der Übersichtlichkeit im Anhang 13.4 durchgeführt und liefert folgende Ergebnisse:

$$I_{C-}(s, t) = \frac{1}{2} \int |G(f)|^2 [S_X(f - f_m) + S_X(f + f_m)] e^{j2\pi f(s - t)} df,$$

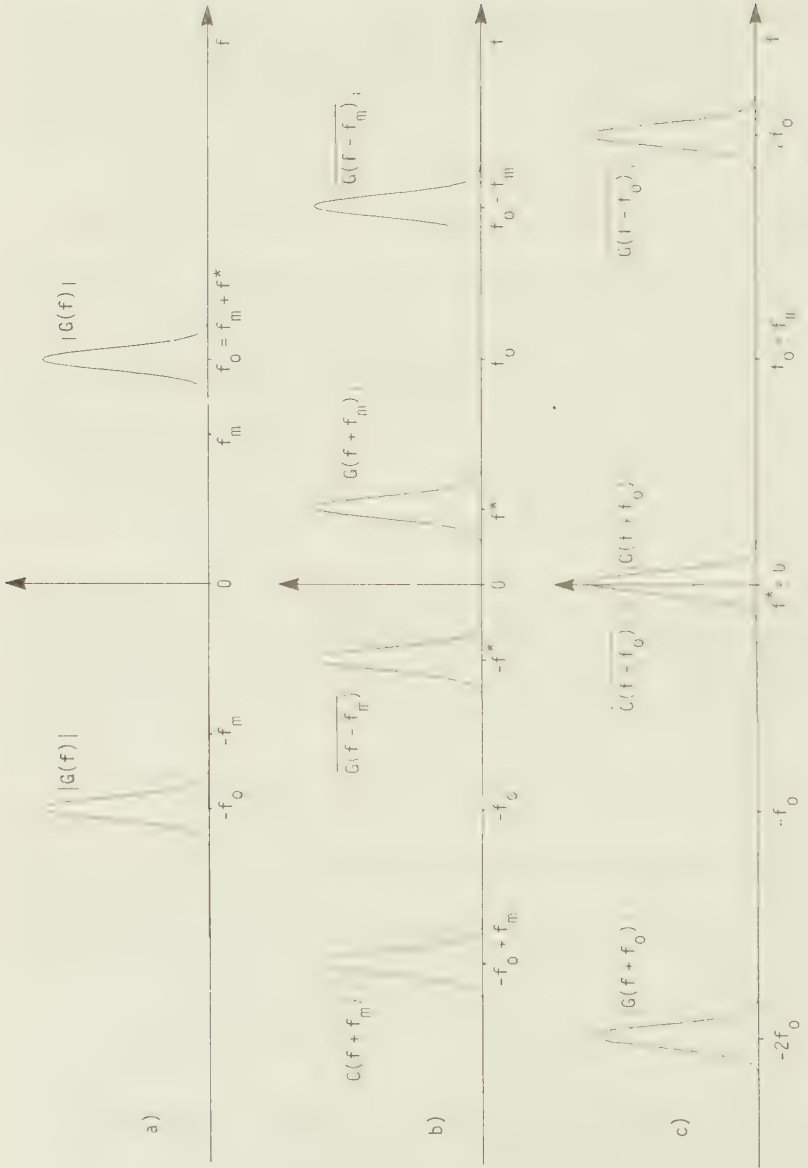


Bild 10.3

$$I_{C+}(s,t) = \cos 2\pi f_m(s+t) \int S_X(f) G(f+f_m) \overline{G(f-f_m)} e^{j2\pi f(s-t)} df,$$

$$I_{S+}(s,t) = \sin 2\pi f_m(s+t) \int S_X(f) G(f+f_m) \overline{G(f-f_m)} e^{j2\pi f(s-t)} df.$$

Betrachtet man dazu Bild 10.3, so wird deutlich, daß für $f_m \neq f_0$, d.h. $f^* \neq 0$, $I_{C+}(s,t)$ und $I_{S+}(s,t)$ vernachlässigbar klein sind, weil $G(f+f_m)$ und $\overline{G(f-f_m)}$ keine wesentlichen Anteile in gemeinsamen Frequenzbereichen besitzen. Der in Bild 10.3c dargestellte Fall für $f^* = 0$ wird später gesondert diskutiert.

Setzt man zunächst die für $f^* \neq 0$ gültige Vereinfachung von Gl.(10.11)

$$\begin{aligned} \sum_1^9 I_V &\approx 2 \left[\int_0^T I_{C-}(t,t) dt \right]^2 + 4 \int_0^T \int_0^T I_{C-}^2(s,t) ds dt \\ &= \frac{T^2}{2} \left\{ \left[S_X(f+f_m) + S_X(f-f_m) \right] |G(f)|^2 df \right\}^2 + \\ &\quad + \left\{ \left[S_X(f+f_m) + S_X(f-f_m) \right] \left[S_X(f+f_m) + S_X(f-f_m) \right] \right. \\ &\quad \times \left. |G(\zeta)|^2 |G(\xi)|^2 \frac{\sin^2 \pi T(\zeta+\xi)}{T\pi^2(\zeta+\xi)} d\zeta d\xi, \right. \end{aligned}$$

in Gl.(10.10) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{var} \hat{S}_T(f^*, e) &\approx \frac{1}{2B^2 T} \left\{ \left[S_X(f+f_m) + S_X(f-f_m) \right] \left[S_X(f+f_m) + S_X(f-f_m) \right] \right. \\ &\quad \left. |G(\zeta)|^2 |G(\xi)|^2 \frac{\sin^2 \pi T(\zeta+\xi)}{T\pi^2(\zeta+\xi)} d\zeta d\xi, \right. \end{aligned}$$

weil der erste Summand gemäß Gl.(10.7) gerade $\mathcal{E}^2 \hat{S}_T(f^*, e)$ ergibt.

Auf Grund der Eigenschaft

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \pi T f}{T\pi^2 f^2} = \delta(f)$$

gilt für große T die asymptotische Näherung

$$\text{var} \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{2B^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} [S_X(f + f_m) + S_X(f - f_m)] |G(f)|^4 df$$

bzw.

$$\text{var} \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{B^2 T} S_X^2(f^*) \int_0^B |G(f)|^4 df, \quad (10.12)$$

wenn man annimmt, daß $S_X(f)$ im Durchlaßbereich des Bandfilters näherungsweise konstant ist und f_m so groß ist, daß sich die verschobenen Spektren $S_X(f + f_m)$ und $S_X(f - f_m)$ nicht überlappen. Dann läßt sich Gl.(10.12) auch in der Form

$$\text{var} \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{B_S T} S_X^2(f^*)$$

darstellen, wobei

$$B_S = \frac{B^2 \int_0^B |G(f)|^4 df}{\int_0^B |G(f)|^4 df} = \frac{\int_0^B |G(f)|^4 df}{\int_0^B |G(f)|^4 df}$$

die sogenannte "äquivalente statistische" Bandbreite ist / 4 , S.278/.

Der Name rührt daher, daß B_S gemäß Gl.(10.12) offenbar die Bandbreite eines Rechteckfilters ist, das bei der Schätzung der Leistungsdichte eines Weißen Prozesses auf die gleiche Varianz wie das Analysierfilter $G(f)$ führt. Für den theoretisch interessanten Fall, daß $G(f)$ selbst ein idealer Bandpaß mit

$$G(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } f_m + f^* - \frac{B}{2} \leq f \leq f_m + f^* + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, stimmen die äquivalente Bandbreite B nach Gl.(10.3) und die statistische Bandbreite überein, und Gl.(10.12) geht in die Form

$$\text{var} \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{BT} S_X^2(f^*) \quad (10.13)$$

über, die sich auf Grund einer ähnlichen Abschätzung auch für das Suchfilterverfahren ergibt / 4 , S.187/.

Für die Schätzung des Spektrums bei der Frequenz $f^* = 0$, d.h. für $f_m = f_0$, gelten die Verhältnisse von Bild 10.3c, so daß die Beiträge der Integrale $I_{c+}(s,t)$ und $I_{s+}(s,t)$ in der Summe (10.11) nicht mehr auf Grund der oben durchgeführten Überlegung vernachlässigt werden dürfen. Faßt man jedoch den 2. und 3. Summanden in Gl.(10.11) zusammen:

$$S_{23} = \left[\int_0^T I_{c+}(t,t) dt \right]^2 + \left[\int_0^T I_{s+}(t,t) dt \right]^2,$$

so erhält man

$$S_{23} = \left\{ \int S_X(f) G(f+f_0) \overline{G(f-f_0)} df \right\}^2 \frac{\sin^2 2\pi f_0 T}{4\pi^2 f_0^2},$$

und man erkennt, daß dieser Beitrag für eine hinreichend große Bandpaßmit-
tenfrequenz f_0 vernachlässigbar klein wird. Dagegen führt die Zusammenfas-
sung des 5. und 6. Summanden in Gl.(10.11) auf

$$S_{56} = 2 \iint S_X(\zeta) S_X(\xi) G(\zeta+f_0) \overline{G(\zeta-f_0)} G(\xi+f_0) \overline{G(\xi-f_0)} \frac{\sin^2 \pi T(\zeta+\xi)}{\pi^2 (\zeta+\xi)^2} d\zeta d\xi,$$

woraus sich für große Meßzeiten T die asymptotische Näherung

$$S_{56} \approx 2T \int S_X^2(f) G^2(f+f_0) \overline{G^2(f-f_0)} df$$

ergibt. Schließlich liefert die Auswertung des 4. Summanden in Gl.(10.11)

$$S_4 = \iint |G(\zeta)|^2 [S_X(\zeta+f_0) + S_X(\zeta-f_0)] |G(\xi)|^2 [S_X(\xi+f_0) + S_X(\xi-f_0)] \times \\ \times \frac{\sin^2 \pi T(\zeta+\xi)}{\pi^2 (\zeta+\xi)^2} d\zeta d\xi,$$

mit der asymptotischen Näherung

$$S_4 \approx T \int |G(f)|^4 [S_X(f+f_0) + S_X(f-f_0)]^2 df.$$

Damit erhält man für die Varianz der Schätzung bei der Frequenz $f^* = 0$

$$\text{var} \hat{S}_T(0,e) \approx \frac{1}{2B^2 T} \int |G(f)|^4 [S_X(f+f_0) + S_X(f-f_0)]^2 df + \\ + \frac{1}{B^2 T} \int S_X^2(f) G^2(f+f_0) \overline{G^2(f-f_0)} df,$$

weil der erste Summand in Gl.(10.11)

$$S_1 = \left[\frac{1}{2B} \int |G(f)|^2 [S_X(f+f_m) - S_X(f-f_m)] df \right]^2 = \mathcal{E}^2 \hat{S}_T(0, e)$$

ergibt. Mit den üblichen Annahmen, daß nämlich ein idealer Bandpaß betrachtet wird und $S_X(f)$ im Durchlaßbereich des Filters konstant ist, vereinfacht sich das Ergebnis zu

$$\text{var} \hat{S}_T(0, e) \approx \frac{2}{BT} S_X^2(0),$$

und es wird deutlich, daß die Varianz der Schätzung für $f^* = 0$ um den Faktor 2 größer ist als für $f^* \neq 0$, Gl.(10.13).

Die Vergrößerung der Varianz tritt natürlich nicht erst bei $f^* = 0$ auf, d.h. wenn $f_m = f_0$ ist, sondern sobald sich die Durchlaßbereiche der verschobenen Filterfrequenzgänge $G(f+f_m)$ und $G(f-f_m)$ überlappen. Im Bild 10.4 ist dieser Effekt für den Fall eines Weißen Geräusches mit $S_X(f) = S_0$ und eines idealen Bandpasses dargestellt.

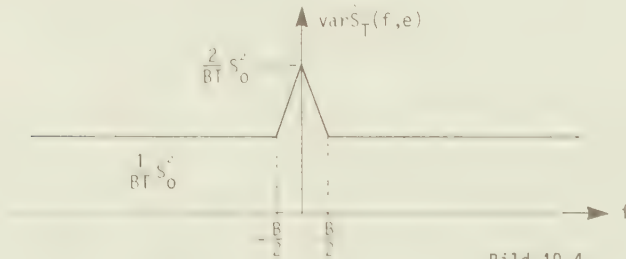


Bild 10.4

Diesem formal gewonnenen Ergebnis steht eine reale meßtechnische Begründung gegenüber: Als Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte wird im wesentlichen die auf die Breite bezogene Leistung eines bestimmten Frequenzintervalls verwendet. Diese Leistung kann entweder, wie im Meßverfahren realisiert, als Zeitmittelwert gewonnen werden oder durch Integration über das Periodogramm des Meßsignals; vgl. Abschnitt 5.5,

$$\hat{q}_Z = \frac{1}{T} \int_0^T z^2(t) dt = \int_{f^*-B/2}^{f^*+B/2} I_T(f) df.$$

Demnach ist die Varianz von $q_Z(e)$ davon abhängig, wie stark die benachbarten Werte von $I_T(f, e)$ in dem Frequenzintervall $f^* - B/2, f^* + B/2$ miteinander

korreliert sind. Wie im Punkt 9.3.4 gezeigt worden ist, gilt für große Meßzeiten T

$$\text{cov}\{I_T(f_1, e), I_T(f_2, e)\} \approx 0,$$

so daß

$$\text{var} \hat{q}_Z(e) = \int_{f^*-B/2}^{f^*+B/2} \text{var} I_T(f, e) df \approx BS_0$$

ist, wobei der Einfachheit halber wiederum ein Weißes Rauschen zugrunde gelegt worden ist. Wenn aber die Meßfrequenz $f^* = 0$ ist, so gilt wegen $I_T(-f, e) = I_T(f, e)$

$$\hat{q}_Z(e) = 2 \int_0^{B/2} I_T(f, e) df$$

und damit

$$\text{var} \hat{q}_Z(e) = 4 \int_0^{B/2} \text{var} I_T(f, e) df \approx 2BS_0.$$

Hierbei ist es unerheblich, daß die Varianz des Periodogramms für $f = 0$ ebenfalls $2 S_0$ ist, vgl. Punkt 9.3.2. Die Verdoppelung der Varianz von $\hat{q}_Z(e)$ resultiert ausschließlich daraus, daß im Intervall $|f| \leq B/2$ entsprechende Werte des Periodogramms bei positiven und negativen Frequenzen gleich sind, so daß de facto nur über ein Frequenzintervall der Breite $B/2$ gemittelt wird.

Stellt man dem Ergebnis (10.13) für die Varianz

$$\text{var} \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{BT} S_X^2(f^*), \quad f^* \neq 0$$

die Abschätzung für die Verschiebung nach Gl.(10.8)

$$b\hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{B^2}{24} S_X''(f^*)$$

gegenüber, so wird deutlich, daß der Einfluß der Bandbreite B auf die beiden Fehler gegenläufig ist: Eine Verkleinerung des Verschiebungsfehlers bedingt eine Vergrößerung der Varianz und umgekehrt. Da die Verschiebung ausschließlich über die Bandbreite beeinflusst werden kann, muß die Varianz durch große Signallängen T hinreichend klein gehalten werden, das

heißt, es muß

$$BT \gg 1$$

sein.

Für den Schätzfehler i.q.M. ergibt sich nach Gl.(9.3)

$$q\hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{BT} S_X^2(f^*) + \frac{B^2}{576} [S_X''(f^*)]^2$$

bzw. in normierter Form

$$\epsilon^2 = q \frac{\hat{S}_T(f^*, e)}{S_X^2(f^*)} \approx \frac{1}{BT} + \frac{B^4}{576} \left[\frac{S_X''(f^*)}{S_X(f^*)} \right]^2. \quad (10.14)$$

Daraus folgt, daß diese Schätzung nicht konsistent ist, obgleich die Varianz für $T \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Für "glatte" Spektren mit $B^2 S_X'' < S_X$ kann der Beitrag des relativen Verschiebungsfehlers in Gl.(10.14) im Vergleich zu $1/(BT)$ vernachlässigt werden, so daß der Schätzwert $\hat{S}_T(f^*, e)$ "praktisch" konsistent ist.

Um einen relativen Schätzfehler $\epsilon^2 \approx 1/(BT)$ von 1% zu erreichen - das entspricht einer Streuung der Schätzwerte von 10% - muß die Signallänge

$$T \approx \frac{100}{B}$$

sein. Für die Analyse eines Tieffußgeräusches mit

$$S_X(f) = \frac{S_0}{(1 - \frac{f^2}{f_0^2})^2 + 4D^2 \frac{f^2}{f_0^2}} \quad (f_0 = 10 \text{ Hz}, D = 0,1)$$

wird bei einer Filterbandbreite von $B = 1$ Hz demnach eine Signaldauer von $T = 100$ s benötigt und die Gesamtzeit für die Schätzung des Spektrums im Bereich $1 \text{ Hz} \leq f \leq 50 \text{ Hz}$ beläuft sich bei Frequenzintervallen von ebenfalls 1 Hz auf ungefähr 83 Minuten. Für dieselbe Aufgabe wird mit einem digitalen Schätzverfahren auf der Grundlage von 10^4 Abtastwerten, was bei einem Abtastintervall von $\Delta t = 10$ ms ebenfalls einer Signallänge von $T = 100$ s entspricht, ohne Abtastvorgang weniger als eine Minute benötigt /261/. Diese Relationen werden bei der Schätzung von niederfrequenten Spektren, z.B. im mHz-Bereich, noch extremer, so daß für solche Anwendungsfälle praktisch nur digitale Schätzverfahren in Frage kommen. Völlig anders stellt sich dagegen die Situation bei höherfrequenten Signalen dar. Wie aus einer im Frühjahr 1984 erschienenen Marktübersicht /282/

zu entnehmen ist, arbeiten digitale Spektralanalysatoren auf der Grundlage der FFT in Frequenzbereichen von 0 bis 100 kHz, während analoge Geräte mit einer oberen Analysierfrequenz von über 20 GHz angeboten werden. Durch den Einsatz von externen Hohlleiter-Mischern können die geeichten Arbeitsbereiche sogar bis über 300 GHz erweitert werden. Die Bandbreite der Analysierfilter und damit die Auflösung kann in weiten Bereichen (z.B. von 10 Hz bis 10 kHz in Schritten 1-3-10) variiert werden, wobei die untere Grenze i.a. von den Restfrequenzschwankungen des verwendeten Oszillators bestimmt wird; diese können durch die Verwendung von Synthesizer-Überlagerungsozillatoren unter 10 Hz gehalten werden. Damit ist es möglich, spektrale Details dieser Größenordnung auch im Mikrowellenbereich zu analysieren.

Mit diesen Anmerkungen zum technischen Stand der im Handel befindlichen Spektralanalysatoren soll der Abschnitt über die Suchfrequenzanalyse mit Bandpaßfiltern abgeschlossen sein. Im folgenden wird das gleiche Meßprinzip, allerdings mit einem Tiefpaß als Analysierfilter untersucht. Dieses Verfahren eignet sich speziell für Laboruntersuchungen im Niederfrequenzbereich, wobei die Meßschaltung z.B. auf einem Tischanalogrechner realisiert werden kann.

10.3 Das Suchfrequenzverfahren mit einem Tiefpaß als Analysierfilter

Bei der Suchfrequenzanalyse mit einem Tiefpaßfilter, wird das Signal $x(t)$ mit einem harmonischen Signal $s(t)$ multipliziert, dessen Frequenz f_m gleich der Meßfrequenz f^* ist, vgl. Bild 10.1b auf S.100. Dabei kommt es im Durchlaßbereich des Analysierfilters zu einer Überlagerung der Spektren $S_x(f+f^*)$ und $S_x(f-f^*)$, wodurch sich die Möglichkeit ergibt, durch eine "symmetrische" Meßanordnung die Varianz der Schätzung wesentlich zu verringern. Diese Zusammenhänge werden im Abschnitt 10.3.2 ausführlich dargestellt. Ansonsten sind die Berechnungen des Erwartungswertes und der Varianz des Schätzwertes

$$\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{BT a_0^2} \int_0^T z^2(t, e) dt, \quad (10.15)$$

wobei $z(t, e)$ jetzt der Prozeß am Ausgang eines Tiefpasses mit der äquivalenten Bandbreite B ist, weitgehend mit den Ausführungen in den voranstehenden Abschnitten identisch, so daß auf zahlreiche Zwischenergebnisse zurückgegriffen werden kann.

10.3.1 Statistische Eigenschaften der Schätzung

Der Erwartungswert dieser Schätzung ergibt sich in Anlehnung an Gl.(10.7) zu

$$E\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{4B} \int |G(f)|^2 \cdot [S_X(f+f^*) + S_X(f-f^*)] df,$$

wobei $|G(f)|^2$ der Leistungsübertragungsfaktor des Tiefpasses ist. Für eine Abschätzung des Verschiebungsfehlers werden die ersten Glieder einer MAC-LAURIN-Entwicklung für die Terme in der eckigen Klammer verwendet:

$$S_X(f \pm f^*) \approx S_X(f^*) \pm f \cdot S_X'(f^*) + \frac{f^2}{2} S_X''(f^*) .$$

Damit erhält man

$$E\hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{2B} \cdot S_X(f^*) \cdot \int |G(f)|^2 df + \frac{1}{4B} S_X''(f^*) \cdot \int f^2 |G(f)|^2 df$$

und für den Sonderfall eines idealen Tiefpasses mit

$$|G(f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für } -B \leq f \leq B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ergibt sich die Verschiebung zu

$$b\hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{B^2}{6} \cdot S_X''(f^*) .$$

Der im Vergleich zum Bandpaß, Gl.(10.8), um den Faktor 4 größere Verschiebungsfehler resultiert daraus, daß bei der Tiefpaßanalyse der Durchlaßbereich des Filters asymmetrisch zur Meßfrequenz f^* liegt, während im Falle des Bandpasses f^* in der Mitte des Durchlaßbereiches liegt, vgl. Bild 10.1b und c auf S.100 .

Auf Grund ähnlicher Überlegungen wie im Fall der Bandpaßanalyse, erhält man als asymptotische Näherung für die Varianz entsprechend Gl.(10.11)

$$\text{var } \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{8B^2} \int |G(f)|^4 \cdot [S_X(f+f^*) + S_X(f-f^*)] df$$

bzw.

$$\text{var } \hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{8B} S_X^2(f^*) ,$$

wenn man wiederum einen idealen Tiefpaß zugrunde legt und zusätzlich annimmt, daß $S_X(f)$ im Durchlaßbereich praktisch konstant ist. Dies ist das selbe Ergebnis wie bei der Messung mit einem Bandpaß, Gl.(10.13), so daß die Aussagen am Ende von Abschnitt 10.2.2 gleichermaßen für einen Tiefpaß mit der äquivalenten Bandbreite B gültig sind.

Eine Verringerung der Meßzeit um etwa 50% wird durch das im folgenden Abschnitt beschriebene "symmetrische" Schätzverfahren möglich, das zum ersten Mal in / 99/ angegeben worden ist.

10.3.2 Reduktion der Varianz durch "symmetrische Messung"

Wenn $\hat{q}_1(e)$ und $\hat{q}_2(e)$ zwei erwartungstreue Schätzungen für den quadratischen Mittelwert q_z eines Prozesses $z(t,e)$ mit den jeweiligen Varianzen $\text{var } \hat{q}_1(e)$ und $\text{var } \hat{q}_2(e)$ sind, so erhält man für die Varianz des Schätzwertes

$$\tilde{q}(e) = \frac{1}{2} [\hat{q}_1(e) + \hat{q}_2(e)]$$

$$\text{var } \tilde{q}(e) = \frac{1}{4} [\text{var } \hat{q}_1(e) + \text{var } \hat{q}_2(e) + 2 \text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e)] .$$

Aus diesem Ergebnis wird deutlich, daß im Prinzip

$$\text{var } \tilde{q}(e) < \text{Min} \{ \text{var } \hat{q}_1(e), \text{var } \hat{q}_2(e) \}$$

sein kann und somit $\tilde{q}$ eine bessere Schätzung für den quadratischen Mittelwert darstellt als $\hat{q}_1$ oder $\hat{q}_2$.

Betrachtet man auf diesem Hintergrund die "symmetrische" Meßschaltung in Bild 10.5, bei der das zu analysierende Signal $x(t)$ in zwei parallelen identischen Kanälen mit einem Sinus- und einem Cosinussignal multipliziert wird, so erhält man entsprechend Gl.(10.15) den Schätzwert

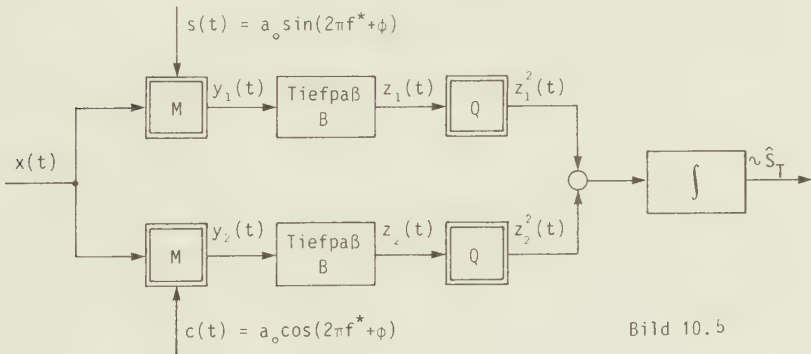


Bild 10.5

$$\begin{aligned} \tilde{S}_T(f^*, e) &= \frac{1}{2B T a_0^2} \int_0^T [z_1^2(t, e) + z_2^2(t, e)] dt \\ &= \frac{1}{B a_0^2} \cdot \frac{1}{2} [\hat{q}_1(e) + \hat{q}_2(e)] . \end{aligned} \quad (10.16)$$

In dieser Darstellung sind wiederum die Einschwingvorgänge der beiden Tiefpässe vernachlässigt worden.

Da die Kovarianzfunktionen der harmonischen Signale $s(t)$ und $c(t)$ gleich sind

$$c_s(\tau) = c_c(\tau) = \frac{a_0^2}{2} \cos 2\pi f^* \tau,$$

ergibt sich auf Grund der Ausführungen im Abschnitt 10.2.1 mit

$$\hat{S}_1(f^*, e) = \frac{1}{B a_0^2} \hat{q}_1(e) \equiv \hat{S}_T(f^*, e)$$

und

$$\frac{1}{B a_0^2} \cdot \hat{q}_2(e) = \hat{S}_2(f^*, e)$$

für die Erwartungswerte

$$\mathcal{E} \hat{S}_1(f^*, e) = \mathcal{E} \hat{S}_2(f^*, e) = \mathcal{E} \hat{S}_T(f^*, e).$$

Damit wird auch

$$\mathcal{E} \tilde{S}_T(f^*, e) = \mathcal{E} \hat{S}_T(f^*, e),$$

und für den Verschiebungsfehler $b \hat{S}_T(f^*, e)$ gelten die Ergebnisse des vorigen Abschnittes.

Aus demselben Grund ist auch

$$\text{var } \hat{S}_1(f^*, e) = \text{var } \hat{S}_2(f^*, e) \equiv \text{var } \hat{S}_T(f^*, e),$$

so daß sich für die Varianz des Schätzwertes $\tilde{S}_T(f^*, e)$

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_T(f^*, e) &= \frac{1}{2} [\text{var } \hat{S}_T(f^*, e) + \text{cov } \hat{S}_1(f^*, e) \hat{S}_2(f^*, e)] \\ &= \frac{1}{2} \text{var } \hat{S}_T(f^*, e) + \frac{2}{B^2 a_0^4} \text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) \quad (10.17) \end{aligned}$$

ergibt. Im folgenden wird gezeigt, daß der zweite Summand vernachlässigbar klein ist, so daß durch die "symmetrische Messung" eine Verringerung der Varianz gegenüber dem Schätzwert $\hat{S}_T(f^*, e)$ um ungefähr 50 % erreicht wird. Ausgehend von Gl. (10.16) ergibt sich zunächst

$$\text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mathcal{E} z_1^2(s, e) z_2^2(t, e) ds dt - q_1 \cdot q_2, \quad ,$$

mit

$$q_1 = \mathcal{E} \hat{q}_1(e) = \mathcal{E} z_1^2(t, e) \quad \text{und} \quad q_2 = \mathcal{E} \hat{q}_2(e) = \mathcal{E} z_2^2(t, e).$$

Bei der Auswertung des Doppelintegrals stellt sich wiederum das Problem, daß die Prozesse $z_1(t, e)$ und $z_2(t, e)$ nicht GAUSSverteilt sind, so daß der bekannte Entwicklungssatz /264, 272/ nicht auf das 4. Moment

$$E(s, t) = \mathcal{E} z_1^2(s, e) z_2^2(t, e)$$

angewendet werden kann. Stellt man hier die beiden Prozesse durch die Faltungsbeziehungen

$$\begin{aligned} z_1(t,e) &= \int g(t-u) x(u,e) s(u,e) du \\ z_2(t,e) &= \int g(t-u) x(u,e) c(u,e) du \end{aligned}$$

dar, so erhält man auf Grund derselben Vorgehensweise wie im Punkt 10.2.2

$$E(s,t) = \iiint g(t-u_1) g(t-u_2) g(s-v_1) g(s-v_2) M_x M_{sc} du_1 du_2 dv_1 dv_2 ,$$

wobei M_x wiederum das 4. Moment des normalverteilten Prozesse $x(t,e)$ und

$$\begin{aligned} M_{sc} &= E s(u_1,e) s(u_2,e) c(v_1,e) c(v_2,e) \\ &= \frac{a_0}{8} [\cos 2\pi f^*(u_1 - u_2 - v_1 + v_2) + \cos 2\pi f^*(u_1 - u_2 + v_1 - v_2) - \cos 2\pi f^*(u_1 + u_2 - v_1 - v_2)] \end{aligned}$$

ist, weil hier mit den orthogonalen Prozessen $s(t,e)$ und $c(t,e)$ moduliert wird. Das hat zur Folge, daß die Summe der Integrale anstelle von Gl.(10.11) jetzt die Form

$$\begin{aligned} \sum_1^9 I_v &= 2 \left[\int_0^T I_{c-}(t,t) dt \right]^2 + 4 \int_0^T \int_0^T I_{s-}^2(s,t) ds dt + 2 \int_0^T \int_0^T I_{c+}^2(s,t) ds dt + \\ &+ 2 \int_0^T \int_0^T I_{s+}(s,t) ds dt - \left[\int_0^T I_{c+}(t,t) dt \right]^2 - \left[\int_0^T I_{s+}(t,t) dt \right]^2 \end{aligned}$$

annimmt, wobei dieselben Abkürzungen wie im Punkt 10.2.2 und im Anhang 13.4 verwendet worden sind.

Für $f^* \neq 0$ können die Beiträge der Integrale über I_{c+} und I_{s+} wiederum vernachlässigt werden, so daß sich mit

$$q_1 = q_2 = \frac{a_0}{2} \cdot I_{c-}(t,t)$$

für die Kovarianz

$$\text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) \approx \frac{a_0}{2T} \int_0^T \int_0^T I_{s-}^2(s,t) ds dt$$

ergibt. Daraus folgt mit

$$I_{s-}(s,t) = \frac{1}{2j} \int |G(f)|^2 \cdot [S_x(f-f^*) - S_x(f+f^*)] e^{j2\pi f(s-t)} df ,$$

s. Anhang 13.4,

$$\begin{aligned} \text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) &\approx \frac{a_0}{8T^2} \iint |G(\zeta)|^2 [S_x(\zeta-f^*) - S_x(\zeta+f^*)] \cdot |G(\xi)|^2 [S_x(\xi-f^*) - \\ &- S_x(\xi+f^*)] \cdot \frac{\sin^2 \pi(\zeta+\xi)}{\pi^2(\zeta+\xi)^2} d\zeta d\xi \end{aligned}$$

und für große Meßzeiten T die asymptotische Näherung

$$\text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) \stackrel{a}{\approx} \frac{1}{8T} \int |G(f)|^4 [S_X(f-f^*) - S_X(f+f^*)]^2 df. \quad (10.18)$$

Geht man hier von derselben Annahme aus wie bei der Abschätzung der Varianz, daß nämlich $S_X(f)$ im Durchlaßbereich des Tiefpasses näherungsweise konstant ist, so ergibt sich

$$\text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) \approx 0,$$

und aus Gl.(10.17) folgt

$$\text{var } \tilde{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{2} \text{var } \hat{S}_T(f^*, e).$$

Dieses Ergebnis wurde durch umfangreiche Untersuchungen auf dem Analogrechner /103/, /107/, meßtechnisch bestätigt, wodurch außerdem gezeigt worden ist, daß die verwendeten Näherungen im Verlauf der Ableitung die Brauchbarkeit der Abschätzungen für die Varianzen kaum beeinträchtigen. Bezüglich der Verschiebungsfehler ist die Situation anders, weil dort in den experimentellen Ergebnissen sehr stark die systematischen Fehler der Meßanordnung, vor allem die Ungenauigkeit der verwendeten Parabelmultiplizierer bei der Bildung von $z^2(t)$ eingehen. Aus diesem Grunde wurde ein Teil der Messungen hybrid durchgeführt. Auf dieses Meßprinzip wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

10.4 Hybride Meßanordnung

Unter einer hybriden Meßanordnung wird in diesem Zusammenhang eine Meßschaltung verstanden, in der Teile der erforderlichen Operationen analog und andere digital durchgeführt werden. Dabei kann die Aufteilung sehr unterschiedlich vorgenommen werden. Im einfachsten Fall versteht man darunter die Erweiterung einer Analogschaltung mit digitaler Peripherie zur Steuerung des Meßablaufs. Eine weitergehende Möglichkeit besteht darin, die Mittelwertbildung digital durchzuführen, um das Übersteuerungsproblem der Meßintegrierer zu umgehen /98/. Im folgenden wird eine Hybridschaltung vorgeschlagen, bei der die gesamte Datenverarbeitung im Zusammenhang mit der Berechnung der quadratischen Mittelwerte q_1 und q_2 digital durchgeführt wird, während die Modulation und die Tiefpaßfilterung weiterhin analog realisiert bleiben, Bild 10.6. Ein Vorteil dieser Schaltung ist, daß der hinsichtlich der Abtastung kritische Teil der Signalverarbeitung analog durchgeführt wird, so daß Fehlmessungen auf Grund des Alias-Effektes grundsätzlich ausgeschlossen werden. Die bei der analogen Modulation auftretenden Fehler können durch eine gute Aussteuerung der Multiplizierer

relativ klein gehalten werden. Die Quadrierer hinter den Tiefpässen, vgl. Bild 10.5, werden dagegen digital realisiert, weil je nach Intensität des Spektrums bei den jeweiligen Meßfrequenzen auch die Spitzenwerte der Signale $z_1(t)$ und $z_2(t)$ stark schwanken können, so daß eine optimale Aussteuerung im gesamten Meßbereich nur mit großem Aufwand zu erreichen ist.

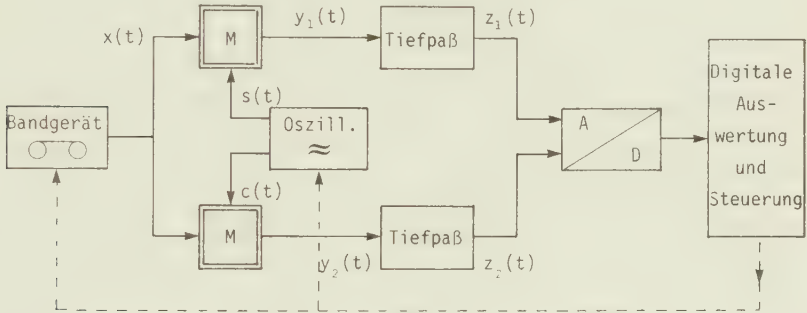


Bild 10.6

Es soll darauf hingewiesen werden, daß bei schlechter Aussteuerung der A/D-Wandler natürlich ebenfalls zusätzliche Fehler auftreten, die aber deutlich kleiner sind als die bei entsprechend ausgesteuerten Parabelmultiplizierern. Für die folgenden Betrachtungen wird vereinbarungsgemäß von idealen Abtasteinrichtungen ausgegangen. Damit ergibt sich mit den schon bekannten Einschränkungen hinsichtlich der Einschwingvorgänge der "symmetrische" Schätzwert

$$\tilde{S}_N(f^*, e) = \frac{1}{2B a_0^2} \cdot \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} [z_1^2(n \cdot \Delta t, e) + z_2^2(n \cdot \Delta t, e)] \quad (10.19)$$

mit $T = N \cdot \Delta t$. Diese Beziehung stellt für kleine Abtastintervalle Δt eine gute Näherung des "analogen" Schätzwertes nach Gl.(10.16) dar, so daß im Prinzip auch die Aussagen über die statistischen Fehler näherungsweise gelten. Das Arbeiten mit kleinen Abtastintervallen ist jedoch unter dem Gesichtspunkt des digitalen Rechenaufwandes nicht optimal, weil die Berechnung der quadratischen Mittelwerte in Gl.(10.19) mit stark korrelierten Meßwerten durchgeführt wird. Die Untersuchung der Varianz des Schätzwertes zeigt, daß bei optimaler Wahl des Abtastintervalls Δt mit relativ kleinen Stichprobenumfängen $N = T/\Delta t$ praktisch die gleiche Varianz erreicht werden kann wie im Fall der kontinuierlichen Mittelwertbildung nach Gl.(10.16). Um den Einfluß des Abtastintervalls deutlich zu machen, wird die Abschätzung

der Varianz im Vergleich zu den voranstehenden Abschnitten in einer modifizierten Form durchgeführt. Für den Erwartungswert und die Verschiebung des Schätzwertes (10.19) gelten jedoch die Ergebnisse aus den Abschnitten 10.3.2 bzw. 10.3.1 entsprechend.

Mit

$$\hat{q}_v(e) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} z_v^2(n \cdot \Delta t, e), \quad v=1,2$$

ergibt sich die Varianz des Schätzwertes (10.19) zu

$$\text{var } \tilde{S}_N(f^*, e) = \frac{1}{2B^2 a_0'} [\text{var } \hat{q}_{1,2}(e) + \text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e)]. \quad (10.20)$$

Die Berechnung des 4. Momentes in

$$\text{var } \hat{q}_v(e) = \frac{1}{N^2} \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} E z_v^2(m \cdot \Delta t, e) z_v^2(n \cdot \Delta t, e) - q_v^2$$

kann mit $m\Delta t = s$ und $n\Delta t = t$ in völliger Analogie zur Vorgehensweise im Punkt 10.2.2 erfolgen und führt für $v=1$ und 2 auf

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{q}_{1,2}(e) &\approx \frac{a_0'}{2} \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} I_{C-}^2(m\Delta t, n\Delta t) \\ &= \frac{a_0'}{8} \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} \left\{ \left| \int |G(f)|^2 |S_X(f-f^*) + S_X(f+f^*)| df \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Trifft man jetzt die übliche Annahme idealer Tiefpässe und konstanter Spektren im Durchlaßbereich, so erhält man die Näherung

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{q}_{1,2}(e) &\approx \frac{a_0'}{2N} S_X^2(f^*) \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} \left[\int_{-B}^B e^{j2\pi f(n-m)\Delta t} df \right]^2 \\ &= \frac{a_0'}{2N} S_X^2(f^*) \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} \frac{\sin^2 \frac{2\pi B(n-m)\Delta t}{2}}{\pi^2 (n-m)^2 \Delta t^2}, \end{aligned}$$

und die Auswertung der Doppelsumme ergibt schließlich

$$\text{var } q_{1,2}(e) \approx \frac{a_0'}{2N} S_X^2(f^*) \cdot [4B' + 2 \sum_1^{N-1} (1 - \frac{k}{N}) \frac{\sin^2 \frac{2\pi Bk\Delta t}{2}}{\pi^2 k \Delta t^2}].$$

Untersucht man dieses Ergebnis hinsichtlich des Einflusses von Δt , so wird

deutlich, daß die Varianz für

$$\Delta t = \frac{1}{2B}$$

minimal wird, weil in diesem Fall die stets positive Summe in der eckigen Klammer verschwindet und gleichzeitig N bei vorgegebener Signallänge T den größten Wert annimmt. Für die Varianz gilt dann

$$\text{var } \hat{q}_{1,2}(e) \approx \frac{2 B^2 a_0^4}{N} S_X^2(f^*)$$

Auf Grund der gleichen Annahmen ergibt sich in Verbindung mit den Zwischenergebnissen aus Abschnitt 10.3.2

$$\text{cov } \hat{q}_1(e) \hat{q}_2(e) \approx 0,$$

so daß aus Gl.(10.20) für die Varianz des Schätzwertes $S_N(f^*, e)$ der einfache Zusammenhang

$$\text{var } \tilde{S}_N(f^*, e) \approx \frac{1}{N} \cdot S_X^2(f^*) \quad (10.21)$$

folgt. Mit $2B\Delta t = 1$ und $N\Delta t = T$ erhält man daraus

$$\text{var } \tilde{S}_N(f^*, e) \approx \frac{1}{2BT} S_X^2(f^*),$$

also dasselbe Ergebnis wie im Fall der "symmetrischen" Messung mit der analogen Schaltung nach Bild 10.3.

Der Abschätzung (10.21) liegt die Annahme idealer Tiefpässe zugrunde. Um den Einfluß der Abtastfrequenz $f_{ab} = 1/\Delta t$ auf die Varianz einer Schätzung mit einem realen Tiefpaß zu untersuchen, wurden Messungen mit einem BUTTERWORTH-Filter 3. Ordnung durchgeführt. Der Leistungsübertragungsfaktor dieses Tiefpasses ist

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/f_g)^6}, \quad f_g = 1 \text{ Hz},$$

Bild 10.7, und die äquivalente Bandbreite berechnet sich nach Gl.(10.3) zu

$$B = \frac{\pi}{3} f_g \approx 1,05 \text{ Hz}.$$

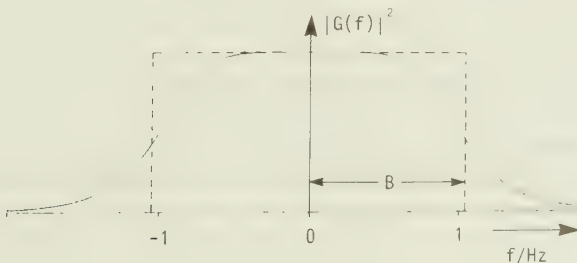


Bild 10.7

Für die statistische Bandbreite ergibt sich $B_s \approx 1,25$ Hz.

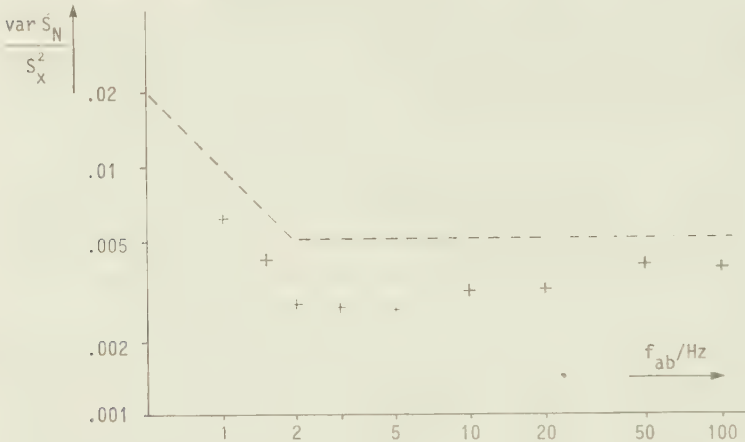


Bild 10.8

In Bild 10.8 sind gemessene Werte (+) der Varianz von $\hat{S}_N$ zusammen mit dem Verlauf auf Grund der Abschätzung (---) über $f_{ab} = 1/\Delta t$ dargestellt [14]. Die Meßwerte basieren auf jeweils 10 Messungen des Spektrums

$$S_x(f) = \frac{S_0}{1+f^2/f_e^2} \quad S_0 = 0.066 \text{ V}^2\text{s}$$

bei der Frequenz $f^* = f_e = 16$ Hz; die Meßdauer beträgt $T = 100$ s. Die Meßwerte zeigen ein schwach ausgeprägtes Minimum im Bereich $1 \text{ Hz} < f_{ab} < 5 \text{ Hz}$. Daraus kann geschlossen werden, daß es ausreichend ist, mit der "theoretisch optimalen" Abtastfrequenz

$$f_{ab} = 1/\Delta t = 2B \approx 2,1 \text{ Hz}$$

zu arbeiten, die sich auf Grund der äquivalenten Bandbreite des verwendeten Filters ergibt. Aus der Darstellung wird außerdem deutlich, daß die gemessenen Werte der Varianz kleiner sind als die geschätzten. Das liegt daran, daß die Abschätzung von einem idealen Tiefpaß mit einer "scharfen" Bandbegrenzung ausgeht, während das verwendete BUTTERWORTH-Filter eine "weiche" Bandbegrenzung darstellt, vgl. Bild 10.7. Von den statistischen Parameterschätzverfahren her ist bekannt, daß die Abschätzungen der Varianz eines Schätzwertes für den Fall des idealen Tiefpaßprozesses stets eine obere Grenze darstellen.

10.5 Allgemeine Bemerkungen zu den analogen Verfahren

An den Schluß dieses Kapitels sollen einige allgemeine Betrachtungen angefügt werden, die unabhängig von der jeweiligen Schaltungsrealisierung für die dargestellten Meßverfahren gemeinsam von Bedeutung sind. Neben der bisher ausgeklammerten Abschätzung der Fehler auf Grund des Einschwingvorgangs der Filter und dem Problem der Auflösung bei kurzen Signallängen werden dabei auch einige Fragen zur technischen Realisierung von analogen Spektralanalysatoren angesprochen.

10.5.1 Abschätzung des Fehlers auf Grund der Einschwingvorgänge

Bei den bisherigen Betrachtungen sind die Fehler auf Grund des Einschwingverhaltens der Analysierfilter außer acht gelassen worden. Im folgenden soll diese Vorgehensweise anhand einer einfachen Fehlerabschätzung nachträglich gerechtfertigt werden. Dazu kann von folgenden Annahmen ausgegangen werden:

i) Die Dauer des Einschwingvorgangs sei durch

$$t_e \approx \frac{1}{B}$$

gekennzeichnet; dies entspricht der doppelten Einschwingzeit eines idealen Tiefpasses mit der Bandbreite B nach KÖPFMÖLLER / 25/.

ii) Das untersuchte Spektrum sei hinreichend glatt, so daß der Verschiebungsfehler im Vergleich zur Varianz vernachlässigt werden kann.

Auf Grund der Betrachtungen im Abschnitt 10.2.2 erhält man damit für den relativen Schätzfehler

$$\epsilon^2 = \frac{\text{var } \hat{S}_X(f^*, e)}{S_X^2(f^*)} \approx \frac{1}{BT},$$

und wenn dieser Fehler wiederum 1% sein soll, was einer Streuung der Meßwerte von 10% entspricht, so wird dazu eine Signallänge

$$T \approx \frac{100}{B}$$

benötigt. Mit $t_e \approx 1/B$ nach Annahme i) ergibt sich damit der Zusammenhang

$$t_e \approx \frac{1}{100} T;$$

das heißt, die Dauer des Einschwingvorgangs beträgt nur etwa 1% der Meßdauer T . Bei dieser Relation kann der Fehler auf Grund der Nichtberücksichtigung des Einschwingverhaltens im Vergleich zur Streuung des Schätzwertes sicherlich vernachlässigt werden.

Um zu zeigen, daß ein relativer Schätzfehler ϵ von 1 keineswegs eine extreme Forderung an die Genauigkeit darstellt, soll ergänzend ein Vertrauensintervall für den Schätzwert auf der Grundlage einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$ angegeben werden, vgl. Abschnitt 9.1. Dazu kann auf Grund der Tatsache, daß die verwendeten Ausdrücke für die Varianz nur für große T gelten, also asymptotische Näherungen darstellen, davon ausgegangen werden, daß die Schätzwerte $S_T(f^*, e)$ näherungsweise normalverteilt sind. Dann gilt

$$1-\alpha = 0,95 = \mathcal{W}\{-1,96 \cdot \sigma_S \leq S_T - \hat{S}_T \leq 1,96 \sigma_S\}$$

und bei Vernachlässigung des Verschiebungsfehlers, das heißt

$$\hat{S}_T(f^*, e) \approx S_X(f^*),$$

folgt daraus

$$\mathcal{W}\{S_X - 1,96 \cdot \sigma_S \leq \hat{S}_T \leq S_X + 1,96 \sigma_S\} \approx 0,95.$$

Mit den oben verwendeten Zahlenwerten ist

$$\sigma_S = \sqrt{\text{var} \hat{S}_T(f^*, e)} \approx 0,1 S_X(f^*),$$

so daß die Breite des Vertrauensintervalls ungefähr $0,4 S_X(f^*)$ beträgt. In Worten heißt dies, daß ein Schätzwert $S_T(f^*)$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ in dem Intervall $S_X(f^*) \pm 0,2 S_X(f^*)$ liegt. Angesichts dieses relativ großen Vertrauensintervalls wird noch einmal deutlich, daß Einschwingvorgänge in der Größenordnung von 1 der Meßdauer T tatsächlich vernachlässigt werden können. Eine genauere Messung z.B. mit einem halb so großen Vertrauensintervall erfordert eine Vergrößerung der Meßdauer um den Faktor 4, so daß die Dauer des Einschwingvorgangs sogar nur noch 0,25 % der Meßzeit ausmacht.

10.5.2 Auflösung bei kurzen Signallängen

Eine wichtige Kenngröße von Schätzwerten für die Leistungsdichte ist die "spektrale Auflösung", die entweder definiert wird als der minimale Abstand zweier Spektrallinien, die in dem Schätzwert noch unterschieden werden, oder durch die Breite bestimmter Details, die von dem Schätzwert noch wiedergegeben werden. In den Leistungsdichtespektren stochastischer Prozesse treten keine Spektrallinien auf, so daß die erste Definition im vorliegenden Zusammenhang von untergeordneter Bedeutung ist. Aus diesem Grunde wird im folgenden als Auflösung die "Breite" von Resonanzüberhöhungen oder spektralen Einbrüchen verstanden, die durch die Schätzung noch nachgewiesen werden können. Für die betrachteten analogen Schätzverfahren

scheint dies die Bandbreite B des Analysierfilters zu sein.

Um zu prüfen, ob und unter welchen Bedingungen diese Vermutung zutrifft, soll im folgenden der Einfluß der Filterbandbreite und der Meßdauer auf die Auflösung genauer untersucht werden. Dazu ist es ausreichend, die Schätzfunktion

$$\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{2B} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T z^2(t, e) dt \quad (10.22)$$

für den Fall der Bandpaßanalyse ohne Modulation zu betrachten, vgl. Bild 10.9. Außerdem ist es für die analytische Darstellung

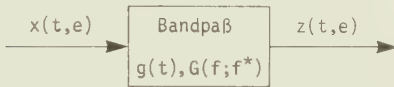


Bild 10.9

vorteilhaft, wie bei der Berechnung der Kovarianz des Periodogramms im Punkt 9.3.4 anstelle der endlichen Integrationsgrenzen in Gl.(10.22) eine Signalgewichtung

$$d_T(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T} & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

einzuführen, so daß bei Vernachlässigung des Einschwingvorgangs mit

$$z(t, e) = \int g(s) x(t-s, e) ds$$

Gl.(10.22) in der Form

$$\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{2B} \iiint g(r) g(s) \cdot x(t-r, e) d_T(t-r) \cdot x(t-s, e) d_T(t-s) dr ds dt$$

geschrieben werden kann. Daraus ergibt sich für den Erwartungswert

$$E\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{2B} \iiint g(r) g(s) c_x(r-s) d_T(t-r) d_T(t-s) dr ds dt,$$

bzw. mit der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung

$$E\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{2B} \iint |D_T(f-v)|^2 \cdot |G(v, f^*)|^2 dv \cdot S_X(f) df, \quad (10.23)$$

wobei

$$D_T(f) = \int d_T(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{\sin \pi f T}{\sqrt{T} \pi f} e^{-j\pi f T}$$

die FOURIER-Transformierte der Signalgewichtung $d_T(t)$ ist. Der Erwartungswert von $\hat{S}_T(f^*, e)$ ergibt sich also aus einer mit dem "Frequenzfenster"

$$F_T(f, f^*) = |D_T(f)|^2 \star |G(f, f^*)|^2$$

gewichteten Mittelung über $S_X(f)$:

$$\mathcal{E}\hat{S}_T(f^*, e) = \frac{1}{2B} \int F_T(f, f^*) \cdot S_X(f) df .$$

Die Auflösung des Schätzwertes (10.22) hängt demnach nicht nur von dem Frequenzgang des Analysierfilters ab, sondern vielmehr von den spektralen Eigenschaften des Frequenzfensters $F_T(f, f^*)$. Es ist deshalb üblich, als Maß für die Auflösung eines Spektralschätzwertes die äquivalente Bandbreite der Fensterfunktion $F_T(f, f^*)$ gemäß einer der bekannten Definitionen zu verwenden; man spricht dann von der äquivalenten Bandbreite des Schätzwertes oder der Schätzung schlechthin. Betrachtet man zur Verdeutlichung dieser Zusammenhänge den Grenzfall eines beliebig schmalbandiger Analysierfilters mit

$$|G(f, f^*)|^2 = \delta(f + f^*) + \delta(f - f^*) ,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} F_T(f, f^*) &= \int \frac{1}{T} \frac{\sin^2 \frac{\pi T(f-u)}{2}}{\pi^2 (f-u)^2} [\delta(u+f^*) + \delta(u-f^*)] du \\ &= \frac{\sin^2 \frac{\pi T(f+f^*)}{2}}{T\pi^2 (f+f^*)^2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi T(f-f^*)}{2}}{T\pi^2 (f-f^*)^2} , \end{aligned}$$

und für die äquivalente Bandbreite erhält man nach Gl.(10.3) in diesem Fall

$$B_T = \frac{1}{T} .$$

Dieses Ergebnis besagt, daß die Auflösung eines analogen Spektralschätzwertes durch die Signallänge T begrenzt ist. Auch dieses Ergebnis gilt für alle nichtparametrischen Schätzwerte der Leistungsdichte $S_X(f)$.

Die Untersuchung der statistischen Fehler hat jedoch gezeigt, daß die Bandbreite eines Schätzwertes sehr viel größer als $1/T$ sein muß, damit die Varianz in vertretbaren Grenzen bleibt. In diesem Fall gelten die asymptotischen Näherungen

$$F_T(f) = \frac{1}{T} \int \frac{\sin^2 \frac{\pi T(f-u)}{2}}{T\pi^2 (f-u)^2} |G(u, f^*)|^2 du \approx |G(f, f^*)|^2$$

und

$$\mathcal{E}\hat{S}_T(f^*, e) \approx \frac{1}{2B} \int |G(f, f^*)|^2 \cdot S_X(f) df , \quad (10.24)$$

aus denen deutlich wird, daß die Auflösung tatsächlich i.w. durch die äquivalente Bandbreite des Analysierfilters bestimmt wird.

10.5.3 Anforderungen an die Dynamik

In voranstehenden Punkten ist darauf hingewiesen worden, daß die systematischen Fehler eines analogen Spektralanalysators in starkem Maße von der Aussteuerung der Multiplizierer abhängen. Im folgenden soll dieses Problem näher untersucht werden, wobei im wesentlichen zwei Fehlerquellen zu beachten sind, nämlich die Begrenzung der Signalamplituden durch den Arbeitsbereich der Multiplizierer und eine Art Ansprechempfindlichkeit auf Grund der Schwellenspannung bei mit Halbleiterdioden realisierten Parabelmultiplizierern. Das Verhältnis der Begrenzerspannung z_B zur Ansprechempfindlichkeit z_A wird als Dynamikbereich bezeichnet; er liegt je nach Güte der Multiplizierer zwischen 20 und 45 dB. In der Literatur, z.B. / 94, S. 3.1 /, wird der Dynamikbereich auch als Verhältnis von z_B zur Streuung σ_r des Eigenrauschens definiert. Bei den verwendeten Parabelmultiplizierern ist jedoch $\sigma_r \ll z_A$, so daß es sinnvoll erscheint, anstelle des Eigenrauschens die Ansprechempfindlichkeit zu berücksichtigen.

Beide Effekte bewirken primär eine Verkleinerung der quadratischen Mittelwerte der jeweiligen Ausgangssignale; hinsichtlich der Auswirkung auf die Schätzwerte bei verschiedenen Meßfrequenzen muß jedoch zwischen dem Multiplizierer vor dem Analysierfilter und dem Quadrierer nach dem Filter unterschieden werden. Während die Fehler im Quadrierer grundsätzlich auf eine Verkleinerung der Meßwerte führen und zumindest näherungsweise abgeschätzt werden können, kann über den Einfluß der Modulationsfehler auf den Schätzwert bei einer bestimmten Meßfrequenz f^* praktisch nichts ausgesagt werden; bei manchen Frequenzen wird $S_x(f)$ zu groß, bei anderen zu klein geschätzt. Es gilt nur pauschal, daß die Gesamtleistung in Form des Integrals über $\hat{S}_T(f)$ zu klein gemessen wird.

Bei der Wahl der Aussteuerung der Multiplizierer ist zu beachten, daß die Reduzierung der Fehler auf Grund der Begrenzung bzw. der Ansprechempfindlichkeit gegensätzliche Maßnahmen erfordern. Der Einfluß der Ansprechempfindlichkeit kann durch genügend große Aussteuerung beliebig klein gemacht werden, dem steht jedoch zwangsläufig eine Vergrößerung des Fehlers auf Grund der Begrenzung der Signalamplituden gegenüber und umgekehrt. Im folgenden soll eine Abschätzung dieser beiden Fehler am Beispiel des Quadrierers nach dem Analysierfilter durchgeführt werden, wobei das Eingangssignal $z(t)$ näherungsweise als Musterfunktion eines normalverteilten Prozesses angesehen wird und die Kennlinie des Quadrierers gemäß Bild 10.8 approximiert wird. Diese Betrachtungsweise liefert obere Grenzen für die Fehler, weil in der Praxis sowohl die Ansprechempfindlichkeit als auch die Begren-

zung nicht wie gezeichnet ideal sondern mit "weichen" Übergängen auftreten.

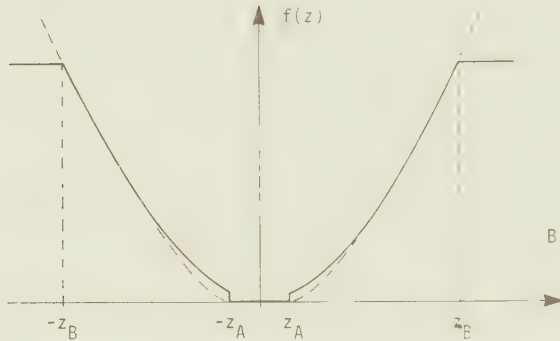


Bild 10.8

Beachtet man, daß die Verteilungsdichte des auf $-z_B$ begrenzten Prozesses

$$p_B(u) = \begin{cases} p_Z(u) + \delta(|u| - z_B) \cdot \int_{z_B}^{\infty} p_Z(v) dv & \text{für } |u| \leq z_B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, so erhält man für den Begrenzungsfehler

$$\epsilon_B = \sigma_Z^2 - 2 \int_0^{z_B} u^2 p_Z(u) du - 2 z_B^2 \int_{z_B}^{\infty} p_Z(u) du \\ = \sigma_Z^2 \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\beta^2/2} \right] - z_B^2 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \right),$$

wobei $\beta = z_B / \sigma_Z$ ein Maß für den Begrenzungsgrad und

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

die Fehlerfunktion ist / 1, S.297/. In der Tabelle 10.1 ist der auf σ_Z^2 bezogene Fehler für verschiedene Werte von β angegeben. Bei einem Begrenzungsgrad von 2,5, bei dem weniger als 1,3% der Amplitudenwerte größer als z_B sind, beträgt der Begrenzungsfehler etwa 2,2% und kann im Vergleich zur Streuung des Schätzwertes i.a. vernachlässigt werden.

β	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
ϵ_B/σ_z^2	.484	.222	.079	.022	.005	.001	.000

Tabelle 10.1

Entsprechend erhält man mit $\alpha = z_A/\sigma_z$ für den Fehler auf Grund der Ansprechempfindlichkeit

$$\begin{aligned}\epsilon_A &= \sigma_z^2 - 2 \int_{z_A}^{\infty} u^2 p_z(u) du \\ &= \sigma_z^2 \left(\operatorname{erf} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \right),\end{aligned}$$

der für verschiedene Werte von α in der Tabelle 10.2 zahlenmäßig angegeben ist. Daraus wird deutlich, daß der Fehler ϵ_A mit zunehmender Aussteuerung sehr schnell abnimmt. Die Relation zwischen den beiden Fehlern wird aus folgender Betrachtung deutlich: Für einfache, aus nichtvorgespannten Si-Dioden aufgebaute Parabelmultiplizierer, wie sie in Tischanalogrechnern mit 10 V Maschinenspannung gebräuchlich sind, ist $z_A < 0,7$ V.

α	1	.5	.2	.1
ϵ_A/σ_z^2	.199	.031	.002	.000

Tabelle 10.2

Ausgehend von einem Begrenzungsgrad $\beta = 2,5$ (s.o), ergibt sich mit $z_B = 10$ V

$$\alpha = \frac{z_A}{\sigma_z} = \frac{z_A}{z_B} \quad \beta < 0,2,$$

und in Verbindung mit Tabelle 10.2 wird deutlich, daß der Fehler auf Grund der Ansprechempfindlichkeit um den Faktor 10 kleiner ist als der Begrenzungsfehler und deshalb vernachlässigt werden kann.

Bei diesen Überlegungen ist davon ausgegangen worden, daß die Multiplizierer in der gewünschten Weise angesteuert werden können. Dies ist im Falle der Modulatoren auch ohne größeren Aufwand möglich, weil man in einer Pilotmessung die maximale Amplitude des Meßsignals bestimmen und die Aussteuerung je nach zulässigem Begrenzungsmaß β festlegen kann.

Bei den Eingangssignalen des Quadrierers hinter dem Analysierfilter ist diese Vorgehensweise mit einer erheblichen Vergrößerung der Gesamtmeßzeit verbunden, weil die Momentanwerte von der Intensität des Dichtespektrums bei der jeweiligen Meßfrequenz abhängen, so daß der Aussteuerungsgrad für jeden Meßpunkt bestimmt werden muß. Dies ist praktisch nur mit einer automatischen Aussteuerungskontrolle möglich. Auf technische Details und andere Möglichkeiten zur Vergrößerung des Dynamikbereichs von Spektralanalysatoren soll hier nicht eingegangen werden. Eine ausführliche Darstellung dieser Problematik findet sich in / 94 /.

10.5.4 Gleitende Mittelwertbildung und Endlosschleife

Bei der Beschreibung der verschiedenen analogen Schätzverfahren im Abschnitt 10.4 ist stets mit einer "idealen" Mittelwertbildung gearbeitet worden. Diese Vorgehensweise ist nicht zwangsläufig; man kann auch anstelle eines Integrierers ein RC-Glied für die Mittelung verwenden. Man erhält dann eine sogenannte gleitende oder RC-Mittelwertbildung, die in Spektralanalysatoren - gegebenenfalls alternativ - eingesetzt wird, weil sie extrem einfach zu realisieren ist. Im folgenden soll kurz auf die Besonderheiten dieser Technik eingegangen werden, wobei der Einfachheit halber eine Suchfilteranalyse gemäß Bild 10.9 zugrunde gelegt wird und wiederum der Fehler auf Grund des Einschwingverhaltens des Bandpasses außer acht gelassen wird.

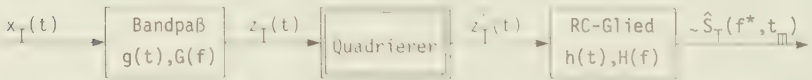


Bild 10.9

Mit B als äquivalenter Bandbreite des Analysierfilters erhält man als Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte

$$\hat{S}_T(f^*, t_m) = \frac{1}{2B} \int_0^{t_m} h(t_m - t) z_T^2(t) dt \quad ,$$

wobei

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \cdot 1(t)$$

die Impulsantwort des RC-Gliedes ist und für die Meßzeit zunächst

$$t_m \leq T$$

gilt. Für die Untersuchung der statistischen Eigenschaften dieser Schätzung werden die beteiligten Signale entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 9.1 als Musterfunktionen entsprechender Prozesse interpretiert.

Damit erhält man zunächst für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E \hat{S}_T(f^*, t_m, e) &= c_z(0) \cdot \frac{1}{2B} \int_0^{t_m} h(t) dt \\ &= \frac{1}{B} \int_0^B |G(f)|^2 S_x(f) df \cdot (1 - e^{-t_m/RC}) , \end{aligned}$$

woraus deutlich wird, daß diese Schätzung auch für den Fall eines im Durchlaßbereich des Bandpasses praktisch konstanten Spektrums nicht erwartungstreu ist. In diesem Fall ergibt sich

$$E \hat{S}_T(f^*, t_m, e) \approx S_x(f^*) \cdot (1 - e^{-t_m/RC})$$

bzw. für die Verschiebung

$$b \hat{S}_T(t_m) \approx - S_x(f^*) e^{-t_m/RC} .$$

Der Verschiebungsfehler, der besonders für kurze Meßsignale, das heißt für

$$t_m \leq T < RC$$

gravierend ist, kann dadurch praktisch beseitigt werden, daß man das Signal $x_T(t)$ auf einem Bandgerät zu einer "Endlosschleife" formt und diese mehrfach durchläuft¹⁾.

Bezeichnet man mit $\tilde{z}(t)$ das periodisch fortgesetzte Signal nach dem Bandpaß, so erhält man mit $t_m = K \cdot T$, wodurch die Darstellung vereinfacht wird, den Schätzwert

$$\tilde{S}_T(f^*, KT) = \frac{1}{2B} \int_0^{KT} \tilde{z}^2(t) h(KT - t) dt , \quad (10.25)$$

1) Diese Endlosschleifentechnik ist zeitweilig in kommerziellen Analog-Korrelatoren und -Spektralanalysatoren verwendet worden; ein Beispiel dafür ist der ISAC-Korrelator der Fa. Noratom.

der sich auf Grund der Periodizität

$$\tilde{z}(t+kT) = \tilde{z}(t), \quad K = \pm 1, \pm 2, \dots$$

in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{S}_T(f^*, KT) &= \frac{1}{2B} \sum_{0}^{K-1} \int_{kT}^{(k+1)T} \tilde{z}^2(t) h(KT - t) dt \\ &= \frac{1}{2B} \sum_{0}^{K-1} \int_0^T \tilde{z}^2(t) h(KT - kT - t) dt \end{aligned} \quad (10.26)$$

darstellen läßt. Daraus folgt mit den Betrachtungen von oben für den Erwartungswert die Näherung

$$\tilde{S}_T(f^*, KT, e) \approx S_x(f^*) \cdot (1 - e^{-KT/RC}) ,$$

aus der deutlich wird, daß die Schätzung für große Werte von K praktisch erwartungstreu ist. Für $KT > 4RC$ ist der Wert des Klammerausdrucks größer als 0,98.

Natürlich kann mit Hilfe der Endlosschleifentechnik nicht auch die Varianz der Schätzung verkleinert werden, weil durch das wiederholte Abspielen des Signalabschnitts $x_T(t)$ keine zusätzliche Information in die Schätzung einfließt. Es zeigt sich vielmehr auf Grund der folgenden Betrachtung, daß die Varianz des Schätzwertes nach Gl. (10.25) für $K > 1$ stets größer ist als für $K = 1$. Allerdings muß beachtet werden, daß in diesem Fall der Verschiebungsfehler relativ groß sein kann, so daß es besser ist, den mittleren quadratischen Schätzfehler zur Beurteilung heranzuziehen.

Ausgehend von Gl. (10.26) erhält man für die Varianz der Schätzung mit RC-Mittelung und Endlosschleife

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{S}_T(KT) &= E\tilde{S}_T^2(KT) - E^2\tilde{S}_T(KT) \\ &= \frac{1}{2B^2(RC)^2} e^{-2KT/RC} \sum_{0}^{K-1} e^{kT/RC} \sum_{0}^{K-1} e^{1T/RC} \int_0^T \int_0^T c_z^2(v-u) e^{u+v/RC} du dv , \end{aligned}$$

wobei aus schreibtechnischen Gründen die Argumente von $\tilde{S}_T$ teilweise weggelassen worden sind.

Bezeichnet man mit

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_T(T) &= \frac{1}{2B^2(RC)^2} e^{-2T/RC} \int_0^T \int_0^T c_z^2(v-u) e^{u+v/RC} du dv \\ &= \frac{1}{2B^2 \cdot RC} \int_0^T c_z^2(\tau) (e^{-\tau/RC} - e^{-2T-\tau/RC}) d\tau \end{aligned}$$

die Varianz des Schätzwertes für $t_m = T$, das heißt für einen Umlauf der Endlosschleife, so folgt unmittelbar der Zusammenhang

$$\text{var } \hat{S}_T(KT) = \text{var } \hat{S}_T(T) \left[\frac{1 - e^{-KT/RC}}{1 - e^{-T/RC}} \right]^2$$

aus dem deutlich wird, daß für $K > 1$

$$\text{var } \hat{S}_T(KT) > \text{var } \hat{S}_T(T)$$

ist. Für den Schätzfehler i.q.M. erhält man damit

$$q \tilde{S}_T(KT) \approx \text{var } \hat{S}_T(T) \cdot \left[\frac{1 - e^{-KT/RC}}{1 - e^{-T/RC}} \right]^2 + S_x^2 \cdot e^{-2KT/RC}.$$

Auf eine weitergehende Untersuchung dieser Zusammenhänge soll hier ebenso verzichtet werden wie auf die Darstellung technischer Details, wie z.B. die Wahl geeigneter Wobbelgeschwindigkeiten bei kontinuierlichen Spektralmessungen oder das Arbeiten mit variablen Bandbreiten in den Analysierfiltern zur Reduktion der Gesamtmeßzeit. Diese Fragen werden zum Teil sehr ausführlich in den Beiträgen / 4 / und / 94 / von BENDAT und PIERSOL behandelt.

11. NICHTPARAMETRISCHE DIGITALE SCHÄTZVERFAHREN

Die Entwicklung der digitalen Spektralschätzverfahren setzt Anfang der fünfziger Jahre mit den grundlegenden Arbeiten von BARTLETT /115/ und TUKEY /142/ ein und kann grob in drei Abschnitte gegliedert werden. In der Anfangsphase werden vornehmlich Spektralschätzwerte auf der Grundlage gewichteter Kovarianzmeßwerte untersucht und praktisch eingesetzt. Nach Bekanntwerden der FFT Mitte der sechziger Jahre rücken die sogenannten Periodogrammschätzwerte in den Vordergrund, die unmittelbar von der diskreten FOURIER-Transformierten des Meßsignals ausgehen. Diese Phase reicht bis Ende der sechziger Jahre, als beginnend mit den Arbeiten von BURG /183/ und PARZEN /138/ eine Schwerpunktverlagerung sowohl in der Theorie als auch in den Anwendungen auf die "parametrischen" Spektralschätzverfahren zu verzeichnen ist.

Die Darstellung der digitalen Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte soll im folgenden mit den inzwischen als klassisch angesehenen nichtparametrischen Schätzverfahren begonnen werden. Auf Grund der Möglichkeit, FFT-Algorithmen in Mikroprozessoren zu realisieren, bilden diese Verfahren die Grundlage für einen wesentlichen Teil der zur Zeit auf dem Markt befindlichen Spektralanalysatoren.

Die parametrischen Verfahren werden im 12. Abschnitt behandelt.

11.1 Einführende Bemerkungen

Während die "Konstruktion" der analogen Schätzwerte unmittelbar von der Definition der Leistungsdichte als "Leistung pro Frequenzintervall" ausgeht, basieren die nichtparametrischen digitalen Schätzverfahren entweder auf der WIENER-KHINTCHINE-Transformation oder auf der Definition der Leistungsdichte als Grenzwert des Periodogramms. Dabei kommt dem Periodogramm trotz seiner Inkonsistenz als Schätzwert für S_x angesichts der FOURIER-Beziehung mit dem Kovarianzschätzwert

$$\hat{C}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x(n)x(n+|k|)$$

auf Grund rechentechnischer Vorteile eine besondere Bedeutung zu.

Im wesentlichen kann zwischen drei Typen von nichtparametrischen Spektralschätzwerten unterschieden werden. Ausgehend von der Feststellung, daß die Kovarianz zwischen benachbarten Periodogrammwerten mit wachsendem N ab-

nimmt, Gl.(9.22), schlägt DANIELL / 60 / das durch Mittelung "geglättete Periodogramm"

$$\hat{S}_N(\lambda_\ell) = \frac{1}{L} \sum_{\ell = \frac{L-1}{2}}^{\ell = \frac{L-1}{2}} I_N(\lambda_k) \quad (L \text{ ungerade}) \quad (11.1)$$

als Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte vor. Dieser Vorschlag bildet den Ausgangspunkt für die Gruppe der sogenannten "direkten" oder "Periodogramm"-Schätzwerte, die allgemein in der Form ¹⁾

$$\hat{S}_N(\lambda) = \int_{-1/2}^{1/2} I_N(v) W_N(\lambda - v) dv$$

dargestellt werden können.

BARTLETT /116/ hat vorgeschlagen, einen gegebenen Datensatz der Länge N zunächst in K aneinandergrenzende Abschnitte der Länge $L = N/K$ aufzuteilen und für jedes Segment ein Periodogramm $I_L(\lambda; i)$ zu berechnen, um daraus den Schätzwert

$$\hat{S}_N(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I_L(\lambda; i) \quad (11.2)$$

zu bilden. Interpretiert man die Mittelung über die Teilperiodogramme als Näherung für die Erwartungwertbildung in der Beziehung (6.14)

$$S_X(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} E I_N(\lambda, e),$$

so wird die Sinnfälligkeit von Gl.(11.2) als Schätzwert für die Leistungsdichte unmittelbar deutlich. Dieser Vorschlag von BARTLETT bildet den Ausgangspunkt für die Entwicklung zweier verschiedener Formen von Spektralschätzwerten. Zum einen ist das Verfahren der Datensegmentierung von WELCH /158/ aufgegriffen und dahingehend erweitert worden, daß die einzelnen Signalabschnitte vor der Berechnung der Teilperiodogramme mit geeigneten Datengewichtungen $d_L(n)$ beaufschlagt werden und sich außerdem über-

1) Aus Gründen einer einfacheren Darstellung werden die allgemeinen Betrachtungen zu den digitalen Schätzwerten in der "kontinuierlichen" Schreibweise durchgeführt. Dabei wird die Beschränkung der Frequenzvariablen auf das Intervall $[-1/2, 1/2]$ i.a. nicht mitgeschrieben

lappen können. Dieses im folgenden als "WELCH-BARTLETT" (WB)-Methode bezeichnete Schätzverfahren wird im Abschnitt 11.3 dargestellt.

Vor dem Hintergrund, daß der Erwartungswert der Schätzung (11.2) identisch ist mit dem des Schätzwertes

$$\hat{S}_N(\lambda) = \sum (1 - \frac{|k|}{L}) \hat{c}_N(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

wobei $\hat{c}_N(k)$ der übliche Kovarianzschätzwert auf der Grundlage aller N Daten ist / 21 /, hat BARTLETT die sogenannten "indirekten" oder "gewichteten Kovarianz"-Schätzwerte eingeführt, die allgemein in der Form

$$\hat{S}_N(\lambda) = \sum w_N(k) \hat{c}_N(k) e^{-j2\pi\lambda k} \quad (11.3)$$

dargestellt werden können. Dabei wird $w_N(k)$ als Kovarianzgewichtung bezeichnet.

Unabhängig von BARTLETT haben BLACKMAN und TUKEY [118] einen anderen Weg zur Berechnung von Leistungsdichteschätzwerten vorgeschlagen: Ausgehend von einem Kovarianzschätzwert $\hat{c}_N(k)$ für $|k| \leq L$ mit $L \leq N$ gewinnen sie zunächst einen "groben" Schätzwert

$$\tilde{S}(\lambda) = \sum_{-L}^L \hat{c}_N(k) \cos 2\pi\lambda k$$

und "glätten" diesen im Frequenzbereich:

$$\hat{S}(\lambda) = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{S}(\nu) W_L(\lambda - \nu) d\nu.$$

Es ist einsichtig, daß diese Vorgehensweise ähnliche Ergebnisse liefert, wie die "indirekte" Methode nach Gl.(3), und man kann zeigen, daß sich die beiden Verfahren formal ineinander überführen lassen. Aus diesem Grunde werden auch die "indirekten" Schätzwerte i.a. als "BLACKMAN-TUKEY" (BT)-Schätzwerte bezeichnet.

Vor dem Bekanntwerden der FFT war die BT-Methode die einzige praktikable Art der digitalen Spektralschätzung; heute spricht für ihre Beibehaltung vor allem, daß bei der Spektrumsberechnung gleichzeitig ein Schätzwert für die Kovarianzfunktion abfällt, der zusätzliche Einsichten in die statistischen Eigenschaften des untersuchten Prozesses vermittelt.

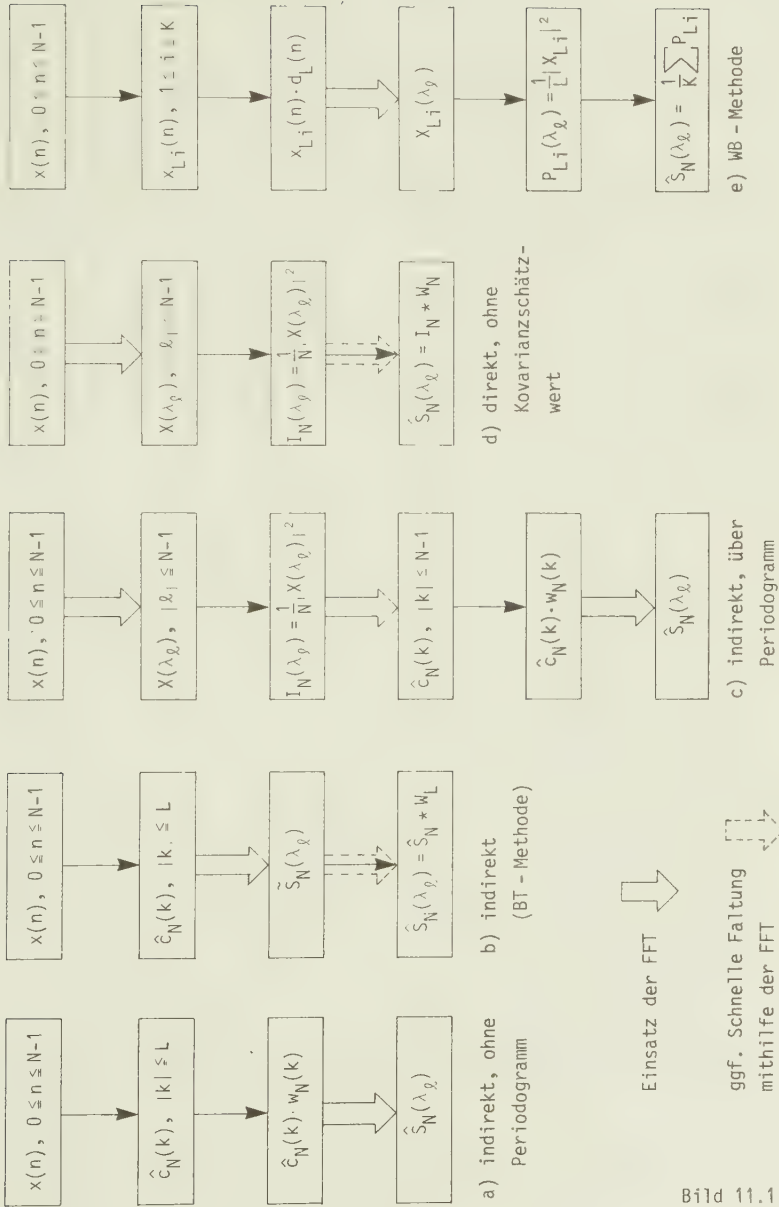


Bild 11.1

Bei Verwendung der FFT kann es gegebenenfalls günstiger sein, den Kovarianzschätzwert nicht unmittelbar aus den Daten, sondern über den Umweg des Periodogramms zu berechnen. Damit stehen im wesentlichen die in Bild 11.1 dargestellten Berechnungswege zur Verfügung, wobei die Verwendung der FFT durch Doppelpfeile besonders gekennzeichnet ist.

Bei der praktischen Durchführung einer digitalen Schätzung können die spektralen Kenngrößen nur für diskrete Frequenzen λ berechnet werden. Wenn bei der indirekten Methode nach Bild 11.1c gleichzeitig ein Schätzwert für die Kovarianzfunktion gewonnen werden soll, muß bei der diskreten FOURIER-Transformation auf die richtige Wahl der Transformationslänge geachtet werden; auf diese Problematik wird im Punkt 11.2.8 eingegangen.

Im folgenden werden die direkten und indirekten Schätzwerte losgelöst von den verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten als eine Klasse aufgefaßt und gemeinsam behandelt.

11.2 BLACKMAN-TUKEY- und Periodogramm-Schätzwerte

Die Äquivalanz der direkten und indirekten Spektralschätzwerte und damit die Rechtfertigung für eine gemeinsame Darstellung folgt unmittelbar aus der Verknüpfung des Kovarianzschätzwertes mit dem Periodogramm über die WIENER-KHINTCHINE-Transformation.

Ausgehend von dem gewichteten Kovarianzschätzwert (11.3)

$$\hat{S}_N(\lambda) = \sum_{k=-N}^{N-1} \hat{c}_N(k) w_N(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

erhält man mit

$$c_N(k) = \int_{-1/2}^{1/2} I_N(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

sofort den gewünschten Zusammenhang

$$\hat{S}_N(\lambda) = \int_{-1/2}^{1/2} I_N(\nu) w_N(\lambda - \nu) d\nu \quad (11.4)$$

wobei

$$w_N(\lambda) = \sum_{k=-N}^{N-1} w_N(k) e^{-j2\pi\lambda k} \quad (11.5)$$

das zu $w_N(k)$ äquivalente Spektralfenster ist.

Für die Kennzeichnung eines Schätzwertes nach Gl.(11.3) oder (11.4) ist es notwendig, die Kovarianzgewichtung $w_N(k)$ bzw. das Spektralfenster $w_N(\lambda)$ genauer zu spezifizieren. Dabei ist zu beachten, daß - genau wie bei den analogen Schätzwerten - grundsätzlich ein Kompromiß zwischen Verschiebungsfehler und Varianz der Schätzung eingegangen werden muß.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die Klasse der sogenannten "algebraischen" Kovarianzgewichte /135/, die in der Form

$$w_N(k) = w\left(\frac{k}{M_N}\right) \quad (11.6)$$

dargestellt werden können. Dabei ist der sogenannte Fensterkoeffizient M_N eine positive Zahl mit den Eigenschaften

$$\left. \begin{array}{l} M_N \rightarrow \infty \\ \frac{M_N}{N} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ für } N \rightarrow \infty, \quad (11.7)$$

und $w(u)$ ist eine für alle u definierte Funktion mit

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 \\ w(-u) &= w(u), \end{aligned} \quad (11.8)$$

deren FOURIER-Transformierte

$$W(v) = \int w(u) e^{-j2\pi uv} du$$

existieren möge. Es wird sich zeigen, daß die statistischen Eigenschaften der Schätzwerte vollständig durch M_N und $w(u)$ bzw. $W(v)$ beschrieben werden können.

Durch die Bedingung $w(0) = 1$ wird sichergestellt, daß der Schätzwert für die Gesamtleistung des Prozesses

$$\int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_N(\lambda) d\lambda = \hat{c}_N(0) w_N(0)$$

durch die Kovarianzgewichtung nicht verfälscht wird ("Leistungskonservierung").

Eine Auswahl verschiedener Kovarianzgewichte und der zugehörigen Spektralfenster wird im Punkt 11.2.6 dargestellt und miteinander verglichen. Im folgenden sollen jedoch zunächst einige allgemeine Eigenschaften diskutiert werden.

Die Leistungsdichte ist als FOURIER-Transformierte der positiv semidefiniten Kovarianzfunktion eine nichtnegative Funktion. Entsprechend wird ein Schätzwert "nicht negativ" genannt, wenn

$$\hat{S}_N(\lambda) \geq 0$$

ist. Dafür ist hinreichend, daß das zugehörige Spektralfenster die Bedingung

$$w_N(\lambda) \geq 0$$

erfüllt; es ist jedoch offensichtlich, daß die Bedingung nicht, wie in /136/ behauptet wird, auch notwendig ist.

Innerhalb der algebraischen Schätzwerte hat eine Unterklasse mit

$$w_N(k) = 0 \quad \text{für } |k| > M \quad (11.9)$$

$$\text{bzw.} \quad w(u) = 0 \quad \text{für } |u| > 1$$

besondere Bedeutung erlangt¹⁾, was zunächst wohl vornehmlich in der Zeiterparnis bei der Berechnung von $c_N(k)$ für $0 \leq k \leq M$, wobei $M \ll N$ ist, begründet gewesen sein mag. Man spricht in diesem Fall von Schätzwerten mit "beschnittenen" Kovarianzgewichten und bezeichnet diese mit $w_M(k)$. In der angelsächsischen Literatur wird der Fensterkoeffizient M deshalb als "truncation point" bezeichnet.

Aus den Eigenschaften der Kovarianzgewichte folgt in Verbindung mit Gl.(11.5), daß die äquivalenten Spektralfenster reelle Funktionen in λ sind und die Bedingungen

$$\begin{aligned} w_N(-\lambda) &= w_N(\lambda), \\ \int_{-1/2}^{1/2} w_N(\lambda) d\lambda &= w_N(0) = 1 \end{aligned} \quad (11.10)$$

1) Hier und im folgenden wird der Einfachheit halber anstelle von M_N nur noch M geschrieben.

erfüllen. Es ist sinnvoll, auch solche Spektralfenster, die von ihrer Entstehung her nicht als FOURIER-Transformierte von Kovarianzgewichten bestimmt sind, mit den Eigenschaften (11.10) auszustatten. Ein bekanntes Beispiel dafür ist der DANIELL-Schätzwert nach Gl.(11.1), der sich in der "kontinuierlichen" Form (11.4) mit dem Spektralfenster

$$w_D(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \text{für } |\lambda| \leq \frac{\beta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\beta = \frac{L}{N}) \quad (11.11)$$

darstellen läßt, das offensichtlich die Bedingungen (11.10) erfüllt.

11.2.1 Der Erwartungswert der Schätzung

Für die folgenden Betrachtungen werden die Schätzvorschriften (11.3) bzw. (11.4) gemäß Abschnitt 9.1 nicht mehr auf eine Musterfunktion sondern auf den diskreten Prozeß $x(n,e)$ selbst angewendet. Dann ist

$$\hat{S}_N(\lambda, e) = \sum \hat{c}_N(k, e) w_N(k) e^{-j2\pi\lambda k} \quad (11.12)$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} I_N(v, e) w_N(\lambda - v) dv \quad (11.13)$$

für eine feste Frequenz $\lambda \in [-1/2, 1/2]$ eine Zufallsvariable, deren statistische Eigenschaften im folgenden untersucht werden sollen. Dabei wird, je nachdem welche Form für die Darstellung vorteilhafter ist, wahlweise mit Gl.(11.12) oder (11.13) gearbeitet.

Ausgehend von dem aus Punkt 9.3.4 bekannten Ergebnis

$$E I_N(\lambda, e) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\mu) |D_N(\lambda - \mu)|^2 d\mu$$

erhält man für den Erwartungswert der Schätzung nach Gl.(11.13)

$$E \hat{S}_N(\lambda, e) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\mu) \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(v)|^2 w_N(\lambda - v - \mu) dv d\mu, \quad (11.14)$$

wobei $D_N(\lambda)$ die FOURIER-Transformierte der im Punkt 9.3.4 eingeführten "Rechteck-Datengewichtung" $d_N(n)$ ist.

Aus diesem Ergebnis lassen sich wichtige Schlüsse für die Durchführung einer Spektralschätzung ziehen, so daß es im folgenden etwas eingehender untersucht werden soll.

Bezeichnet man die Faltung von $|D_N(\lambda)|^2$ und $W_N(\lambda)$ als "effektives" Frequenzfenster $W_e(\lambda)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{e}\hat{S}_N(\lambda, e) &= \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\mu) W_e(\lambda - \mu) d\mu \\ &= \sum c_X(k) w_e(k) e^{-j2\pi k\lambda} \end{aligned} \quad (11.15)$$

wobei

$$w_e(k) = w_N(k) r_{dN}(k)$$

die effektive Kovarianzgewichtung und

$$r_{dN}(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{N} & \text{für } |k| < N \\ 0 & \text{" } |k| \geq N \end{cases}$$

die Korrelationsfolge der Datengewichtung $d_N(n)$ ist.

Wenn $S_X(\lambda)$ im Durchlaßbereich von $W_e(\lambda)$ näherungsweise als konstant angenommen werden kann, erhält man wegen

$$\int_{-1/2}^{1/2} W_N(\lambda) d\lambda = \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(\lambda)|^2 d\lambda = 1$$

aus Gl.(11.15) das gewünschte Ergebnis

$$\hat{e}\hat{S}_N(\lambda, e) \approx S_X(\lambda) .$$

Völlig anders ist dagegen die Situation, wenn das zu schätzende Spektrum einen großen Dynamikbereich, d.h. ausgeprägte Überhöhungen oder Einbrüche aufweist. Um die dabei auftretende Problematik deutlich zu machen, soll der Erwartungswert eines DANIELL-Schätzwertes mit einem Spektralfenster gemäß Gl.(11.11) für das analytisch besonders einfach zu behandelnde Spektrum

$$S_X(\lambda) = S_0 + \delta(|\lambda| - \lambda_0)$$

untersucht werden. Dabei stellt der δ -Impuls den Extremfall einer starken Spektralüberhöhung in einem ansonsten glatten Spektrum niedriger Leistungsdichte dar.

Berechnet man zunächst den Erwartungswert des Periodogramms, so erhält man

$$\mathcal{E}I_N(\lambda, e) = S_0 + |D_N(|\lambda| - \lambda_0)|^2,$$

und aus der Darstellung dieses Zwischenergebnisses im Bild 11.2a erkennt man, daß der "niedrige" Anteil S_0 des Spektrums, der mit der Abzisse zusammenfallen möge, weitgehend durch die Seitenmaxima von $|D_N(\lambda)|^2$ überdeckt und verfälscht wird; dieser Effekt heißt "Leistungsverschleifung" ("leakage"). Führt man nun die Faltung mit dem DANIELL-Fenster durch, so erhält man

$$\mathcal{E}\hat{S}_N(\lambda, e) = S_0 + \frac{1}{\beta} \int_{-\beta/2}^{\beta/2} |D_N(|\lambda| - \lambda_0 - \nu)|^2 d\nu$$

und aus der Darstellung im Bild 11.2b wird deutlich, daß zwar eine Glättung des Verlaufs von $\mathcal{E}I_N(\lambda, e)$ erfolgt, aber die Leistungsverschleifung selbst im wesentlichen unverändert geblieben ist. Da dieser unerwünschte Effekt auch für große Datenlängen N erhalten bleibt, müssen zu seiner Vermeidung andere Maßnahmen ergriffen werden. Dazu dient primär eine geeignete Vorfilterung der Daten, um die Dynamik des Spektrums vor der eigentlichen Schätzung möglichst klein zu machen ("prewhitening", vergl. 10.2.1),

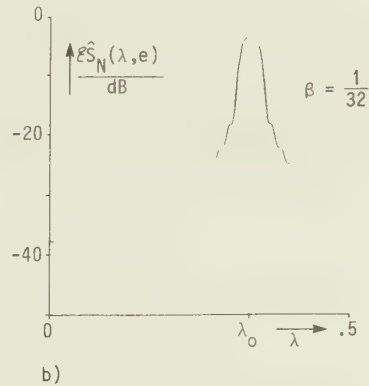
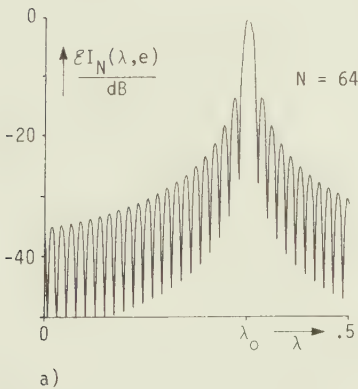


Bild 11.2

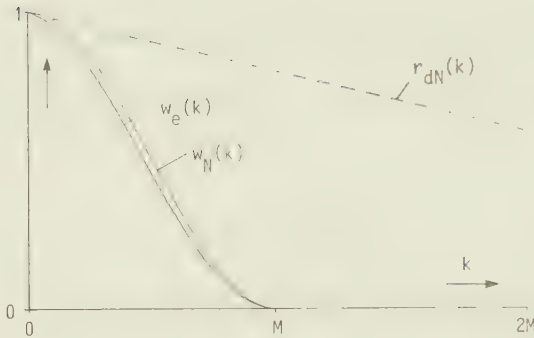


Bild 11.3

oder, wenn diese Möglichkeit nicht gegeben ist, die Verwendung von nicht-konstanten Datengewichtungen $d_N(n)$, deren Spektralfunktion $|D_N(\lambda)|$ bessere Eigenschaften hinsichtlich der Seitenmaxima aufweist. Diese Vorgehensweise wird im Zusammenhang mit den WB-Schätzwerten im Abschnitt 11.3 weiter verfolgt.

Für die folgenden Ausführungen wird davon ausgegangen, daß die Spektren - ggf. nach einer Vorfilterung - hinreichend glatt sind und die Datenlänge N sehr viel größer ist als die Ausdehnung der Kovarianzgewichtung $w_N(k)$. Dann ist, wie aus Bild 11.3 deutlich wird, der Einfluß von $r_{dN}(k)$ zu vernachlässigen, und es kann mit den asymptotischen Näherungen

$$w_e(k) \approx w_N(k) \quad \text{bzw.} \quad W_e(\lambda) \approx W_N(\lambda)$$

gearbeitet werden. Dazu sei angemerkt, daß die Näherung im Frequenzbereich auch aus der δ -Eigenschaft /6/

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |D_N(\lambda)|^2 = \delta(\lambda)$$

folgt.

11.2.2 Abschätzung des Verschiebungsfehlers

Mit den soeben getroffenen Vereinbarungen läßt sich der Erwartungswert einer BT-Schätzung in der genäherten Form

$$\mathcal{E} \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \int_{-1/2}^{1/2} S_X(v) W_N(\lambda - v) dv \quad (11.16)$$

darstellen. Dieses Ergebnis stimmt formal mit dem für analoge Schätzwerte

$$\mathcal{E} \hat{S}_T(f, e) \approx \int S_X(z) \frac{|G(f, z)|^2}{2B} dz$$

überein, Gl.(10.24). Der entscheidende Unterschied besteht jedoch darin, daß das Spektralfenster $W_N(\lambda)$ im Gegensatz zu der entsprechenden analogen Größe $|G(f)|^2 / 2B$ von der Datenlänge N abhängt und deshalb der digitale Schätzwert $\hat{S}_N(\lambda)$ durch geeignete Wahl von $W_N(\lambda)$ asymptotisch erwartungstreu gemacht werden kann. Diese Möglichkeit besteht bei den analogen Schätzwerten prinzipiell nicht.

Aus Gl.(11.16) folgt unmittelbar, daß dazu auch das Spektralfenster die Eigenschaft

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_N(\lambda) = \delta(\lambda)$$

besitzen muß.

Man kann allgemein zeigen, daß die aus algebraischen Kovarianzgewichten abgeleiteten Spektralfenster

$$W_N(\lambda) = \sum w_N(k) e^{-j2\pi\lambda k} = \sum w\left(\frac{k}{M}\right) e^{-j2\pi\lambda k}$$

diese Eigenschaft besitzen. Ersetzt man nämlich für $N \rightarrow \infty$ und damit gemäß den Eigenschaften (11.7) auch $M \rightarrow \infty$ die rechte Summe durch ein Integral, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} W_N(\lambda) &= \lim_{M \rightarrow \infty} M \int w(u) e^{-j2\pi\lambda M u} du \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} M W(M\lambda). \end{aligned}$$

Substituiert man nun $\mu = z$, so folgt unmittelbar

$$\lim_{M \rightarrow \infty} W_N(\lambda) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{z}{M}\right) e^{-j2\pi\lambda z} dz = \delta(\lambda),$$

weil vereinbarungsgemäß $w(0) = 1$ ist. Auf die am Rande abgefallene asymptotische Näherung

$$W_N(\lambda) \approx M W(M\lambda) \quad (11.17)$$

wird im folgenden wiederholt zurückgegriffen.

Ausgehend von Gl.(11.16), die in der gleichwertigen Form

$$\hat{S}_N(\lambda, e) \approx \int_{-1/2}^{1/2} W_N(v) S_X(\lambda - v) dv$$

dargestellt werden kann, läßt sich wie bei den analogen Schätzwerten eine einfache Näherung für den Verschiebungsfehler

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) = \hat{S}_N(\lambda, e) - S_X(\lambda)$$

angeben. Wenn $S_X(\lambda)$ eine stetige 2. Ableitung besitzt, so gilt nach dem TAYLORSchen Satz

$$S_X(\lambda - v) = S_X(\lambda) - v S_X'(\lambda) + \frac{v^2}{2} S_X''(\lambda - \theta v), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

und man erhält mit den in Gl.(11.10) angegebenen Eigenschaften von $W_N(\lambda)$

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} W_N(v) v^2 S_X''(\lambda - \theta v) dv. \quad (11.18)$$

Aus dieser asymptotisch exakten Beziehung ergibt sich die Näherung

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) \approx S_X''(\lambda) \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} v^2 W_N(v) dv$$

auf Grund der Annahme, daß sich S_X'' im Durchlaßbereich des Spektralfensters nur wenig ändert.

Beschränkt man sich auf algebraische Schätzwerte, so folgt in Verbindung mit Gl.(11.17)

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{k_b}{M^2} S_X''(\lambda), \quad (11.19)$$

wobei

$$k_b = \frac{1}{2} \int v^2 W(v) dv = -\frac{1}{8\pi^2} W''(0) \quad (11.20)$$

eine für jedes Spektralfenster bzw. die entsprechende Kovarianzgewichtung spezifische Konstante ist¹⁾. Dabei muß neben der Forderung, daß $w(u)$ an der Stelle $u = 0$ zweimal differenzierbar ist, beachtet werden, daß Gl.(11.19) nur für positiv-definite Schätzwerte brauchbare Aussagen über den Verschiebungsfehler liefert. Die Bedingung $W(v) \geq 0$ stellt nämlich sicher, daß ein kleiner Wert von k_b gleichbedeutend damit ist, daß das Spektralfenster in der Umgebung von Null konzentriert ist; vgl. dazu auch Abschnitt 11.4. Dies kann sehr einfach gezeigt werden, denn aus $W(v) \geq 0$ folgt in Anlehnung an die TCHEBYCHEFF-Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\int_{|v| > \varepsilon} W(v) dv \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int v^2 W(v) dv = \frac{2k_b}{\varepsilon^2}$$

wobei $2k_b$ anstelle von σ^2 steht /174/.

Außerdem läßt sich in diesem Fall entsprechend der Vorgehensweise in Punkt 10.3.1 eine obere Grenze für den Betrag des Verschiebungsfehlers angeben.

Wenn nämlich $|S_X''(\lambda)| \leq G$ ist, so gilt

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) \leq k_b \frac{G}{M^2}.$$

Abschließend soll noch eine interessante Querverbindung zu einem Ergebnis aus dem Bereich der analogen Schätzverfahren hergestellt werden. Betrachtet man das von DANIELL vorgeschlagene Spektralfenster

$$w_D(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \text{für } |\lambda| \leq \frac{\beta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

Gl.(11.11), wobei β die Bandbreite dieses Rechteckfensters ist, so erhält man für die zugehörige Kovarianzgewichtung

1) Die Näherung (11.19) ist auf Grund völlig anderer Überlegungen auch von PARZEN /138/ gefunden worden.

$$w_D(f) = \frac{\sin \pi f k}{\pi f k} \cdot \frac{\sin \pi \frac{k}{M}}{\pi \frac{k}{M}}.$$

Dieses Ergebnis zeigt im übrigen, daß auch der DANIELL-Schätzwert zur Klasse der algebraischen Schätzwerte mit

$$w(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u} \quad \text{und} \quad W(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } |v| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört. Gemäß Gl.(11.20) erhält man

$$k_b = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} v^2 dv = \frac{1}{24},$$

und als Näherung für den Verschiebungsfehler nach Gl.(11.19) ergibt sich damit

$$\hat{bS}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{24} S_X''(\lambda).$$

Überträgt man dieses Ergebnis mithilfe von Gl.(8.5) in den ursprünglichen Frequenzbereich, so erhält man mit $T = N \cdot \Delta t$ und $B = B \cdot \Delta t$ die bekannte Näherung für einen analogen Schätzwert

$$\hat{bS}_T(f, e) \approx \frac{B^2}{24} S_X''(f),$$

Gl.(10.8), wobei vorausgesetzt worden ist, daß kein Alias-Effekt auftritt. Dieser Zusammenhang ist im Grunde nicht verwunderlich: Für beide Abschätzungen sind dieselben Voraussetzungen getroffen worden, nämlich erstens hinreichend große Signallängen, so daß die asymptotischen Näherungen gültig sind, und zweitens ideale Rechteckfilter für die Analyse. Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob die für den Schätzwert benötigten Spektralanteile durch Filterung des Zeitsignals gewonnen werden, wie dies bei der analogen Messung geschieht, oder ob zunächst eine Spektralzerlegung des ursprünglichen Signals durchgeführt wird und dann nur die Anteile im Durchlaßbereich des Spektralfensters für die Bildung des Schätzwertes herangezogen werden.

Der entscheidende Unterschied - und darauf soll hier noch einmal ausdrücklich hingewiesen werden - besteht darin, daß im diskreten Fall die Bandbreite

$$\beta = \frac{1}{M}$$

mit zunehmender Datenlänge immer kleiner wird, so daß diese Schätzung im Gegensatz zur "analogen" asymptotisch erwartungstreu ist.

11.2.3 Varianz und Nachweis der Konsistenz

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 9.3.4 für die Kovarianz des Periodogramms läßt sich die Varianz der hier betrachteten Schätzwerte vergleichsweise einfach bestimmen und abschätzen. Gemäß Gl.(9.2) gilt

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) = \mathcal{E} \hat{S}_N^2(\lambda, e) - \mathcal{E}^2 \hat{S}_N(\lambda, e),$$

und man erhält daraus in Verbindung mit Gl.(11.13)

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{E} I_N(v_1, e) I_N(v_2, e) W_N(\lambda - v_1) W_N(\lambda - v_2) dv_1 dv_2 - \\ &- \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{E} I_N(v_1, e) \mathcal{E} I_N(v_2, e) W_N(\lambda - v_1) W_N(\lambda - v_2) dv_1 dv_2 \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \text{cov}(I_1, I_2) W_N(\lambda - v_1) W_N(\lambda - v_2) dv_1 dv_2, \quad (11.21) \end{aligned}$$

wobei die Abkürzung

$$\text{cov}(I_1, I_2) = \text{cov}\{I_N(v_1, e), I_N(v_2, e)\}$$

verwendet worden ist. Setzt man in Gl.(11.21) die asymptotische Näherung von S. 93

$$\text{cov}(I_1, I_2) \cong S_X(\lambda_1) S_X(\lambda_2) \frac{1}{N} [|D_N(\lambda_1 + \lambda_2)|^2 + |D_N(\lambda_1 - \lambda_2)|^2]$$

ein, so ergibt sich als Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) &\cong \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} S_X(v_1) S_X(v_2) [|D_N(v_1 + v_2)|^2 + |D_N(v_1 - v_2)|^2] \cdot \\ &\cdot W_N(\lambda - v_1) W_N(\lambda - v_2) dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

Da sich die beiden Terme in der eckigen Klammer für große N wie δ -Funktionen verhalten, erhält man durch Integration über v_2

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} S_x^2(v) W_N(\lambda-v) [W_N(\lambda+v) + W_N(\lambda-v)] dv. \quad (11.22)$$

Für hinreichend große N und damit schmale Spektralfenster $W_N(\lambda)$ gelten im Prinzip die Verhältnisse von Bild 11.4, aus denen deutlich wird, daß

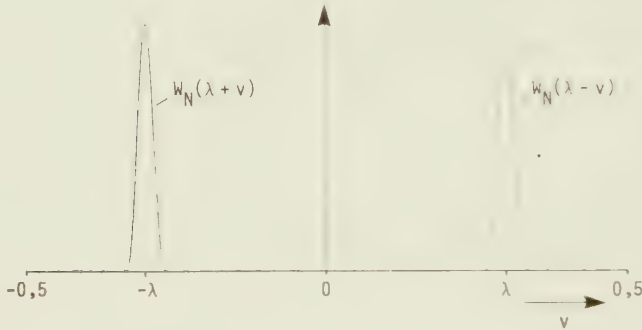


Bild 11.4

der Summand $W_N(\lambda+v)$ in der Klammer praktisch keinen Beitrag leistet, so daß sich schließlich für $\lambda \neq 0, \pm 1/2$

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} S_x^2(v) W_N^2(\lambda-v) dv \quad (11.23)$$

ergibt. Wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda = \pm 1/2$ ist, folgt aus Gl.(11.22) wegen der Periodizität von $W_N(\lambda)$

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{2}{N} \int_{-1/2}^{1/2} S_x^2(v) W_N^2(\lambda-v) dv, \quad \lambda = 0, \pm 1/2.$$

In der Literatur werden die beiden Ergebnisse zuweilen mit Hilfe des KRON-ECKER Symbols

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x=y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in der Form

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx [1 + \delta(0, \lambda) + \delta(\pm 1/2, \lambda)] \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} S_x^2(v) W_N^2(\lambda-v) dv$$

zusammengefaßt. Auf diese Schreibweise wird hier bewußt verzichtet, weil dadurch vorgetäuscht wird, daß die Verdopplung der Varianz exakt bei $\lambda = 0$ bzw. $\lambda = \pm 1/2$ auftritt. Das ist jedoch nicht richtig, denn die Vergrößerung der Varianz setzt bereits dann ein, wenn die Durchlaßbereiche der verschobenen Spektralfenster $W_N(\lambda \pm v)$ über den Nullpunkt hinausragen, so daß sich bei der Bildung des Schätzwertes

$$\hat{S}_N(\lambda, e) = \int_{-1/2}^{1/2} I_N(v, e) W_N(\lambda - v) dv$$

auf Grund der Symmetrie des Periodogramms die Mittelung zum Teil über identische Werte von $I_N(\lambda, e)$ erstreckt (vgl. dazu auch die Diskussion im Punkt 10.2.2).

Die nachfolgenden Betrachtungen beschränken sich auf den Fall $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq \pm 1/2$. Dann zeigt sich in Verbindung mit den Überlegungen bezüglich der Verschiebung im voranstehenden Abschnitt, daß der Schätzwert $\hat{S}_N(\lambda, e)$ konsistent ist, wenn das Integral in Gl.(11.23) für $N \rightarrow \infty$ endlich bleibt.

Diese Aussage soll zunächst am Beispiel des schon bekannten DANIELL-Schätzwertes verdeutlicht werden. Mit der Fensterfunktion nach Gl.(11.11) ergibt sich

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{N\beta^2} \int_{\lambda - \frac{\beta}{2}}^{\lambda + \frac{\beta}{2}} S_X^2(v) dv \approx \frac{1}{\beta N} S_X^2(\lambda), \quad (11.24)$$

wobei angenommen worden ist, daß sich $S_X(\lambda)$ im Intervall $\lambda \pm \beta/2$ praktisch nicht ändert.

Aus den Betrachtungen über den Verschiebungsfehler des DANIELL-Schätzwertes ist der Zusammenhang

$$\beta = \frac{1}{M}$$

bekannt, so daß die Varianz auch in der Form

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{M}{N} S_X^2(\lambda) \quad (11-25)$$

dargestellt werden kann. Auf Grund der in Gl.(11.7) postulierten Eigenschaft der algebraischen Schätzwerte

$$M/N \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \rightarrow \infty$$

folgt im Zusammenhang mit der bereits nachgewiesenen asymptotischen Erwartungstreue, daß der DANIELL-Schätzwert auch konsistent ist. Diese Überlegungen werden im folgenden auf algebraische Schätzwerte mit beliebigen Kovarianzgewichten der Form (11.6) übertragen. Dazu soll - wie in dem Beispiel bereits geschehen - zusätzlich angenommen werden, daß sich die Leistungsdichte $S_X(\lambda)$ im Durchlaßbereich des Spektralfensters wesentlich langsamer ändert als die Fensterfunktion selbst. Dann kann in Gl.(11.23) $S_X^2(\lambda)$ vor das Integral gezogen werden und man erhält

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx S_X^2(\lambda) \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} W_N^2(\lambda) d\lambda. \quad (11.26)$$

Daraus folgt mit Gl.(11.17)

$$\int_{-1/2}^{1/2} W_N^2(\lambda) d\lambda \approx M \int W^2(v) dv = M \int W^2(u) du, \quad (11.27)$$

und man erhält für die Varianz eine ähnlich einfache Näherung wie für den Verschiebungsfehler, nämlich

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx S_X^2(\lambda) \frac{M}{N} k_V, \quad (11.28)$$

wobei

$$k_V = \int W^2(u) du = \int W^2(v) dv$$

wiederum eine für jede Kovarianzgewichtung spezifische Konstante ist.

Für den DANIELL-Schätzwert ist mit

$$W(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } |v| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

vgl. Punkt 11.3.1, offensichtlich $k_V = 1$, und Gl.(11.28) liefert das Ergebnis (11.25) im obigen Beispiel.

Auf Grund der Eigenschaft

$$M/N \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad N \rightarrow \infty$$

ist damit gezeigt, daß die wichtige Klasse der algebraischen Schätzwerte konsistent ist.

Vergleicht man das Ergebnis (11.28) für die Varianz der Schätzung mit der Näherung (11.19) für den Verschiebungsfehler

$$b \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{M^2} k_b \cdot S_x''(\lambda) ,$$

so kommt man zu einer wichtigen Aussage bezüglich der Wahl von M . Für einen durch $w(u)$ bzw. $W(v)$ bestimmten Schätzwert sind k_b und k_v Konstanten, so daß bei einer vorgegebenen Zahl N von Meßwerten

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \sim M \quad \text{und} \quad b \hat{S}_N(\lambda, e) \sim \frac{1}{M^2}$$

gilt. Hieraus resultieren widersprüchliche Forderungen hinsichtlich der Festlegung von M : Um die Varianz klein zu halten, muß M möglichst klein gewählt werden; dies ist aber mit einem Anwachsen des Verschiebungsfehlers verbunden und umgekehrt.

Ausgehend von den Ergebnissen für die Varianz und den Verschiebungsfehler ergibt sich nach Gl.(9.3) für den Schätzfehler im quadratischen Mittel

$$q \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{M}{N} k_v S_x^2(\lambda) + \frac{1}{M^4} k_b^2 [S_x''(\lambda)]^2 .$$

Im Punkt 11.2.6 werden einige spezielle Kovarianzgewichte und Spektralfenster hinsichtlich ihres Einflusses auf die statistischen Eigenschaften der Schätzwerte untersucht und miteinander verglichen.

11.2.4 Die äquivalente Bandbreite der Schätzwerte

Als Bandbreite eines Schätzwertes für die spektrale Leistungsdichte wird, wie bereits im Zusammenhang mit den analogen Schätzverfahren dargestellt worden ist, die äquivalente Bandbreite der Fensterfunktionen $F_T(f)$ bzw. $W_e(\lambda)$ verstanden, durch die der Erwartungswert der jeweiligen Schätzung charakterisiert wird. Für hinreichend lange Meßsignale ist dies bei den analogen Schätzverfahren die äquivalente Bandbreite des Analysierfilters und bei den hier diskutierten digitalen Schätzwerten gemäß Gl.(11.13) die äquivalente Bandbreite des Spektralfensters $W_N(\lambda)$. Dies ist beim DANIELL-Schätzwert offensichtlich

$$\beta = \frac{1}{M} .$$

Für beliebige Fensterfunktionen $W_N(\lambda)$ gibt es wie bei den analogen Schätzwerten verschiedene Definitionen für die äquivalente Bandbreite β , von denen im folgenden nur drei erwähnt werden sollen. PARZEN /136/ definiert β als die Breite eines Rechteckfensters mit gleicher Höhe und Fläche wie $W_N(\lambda)$:

$$\beta = \frac{1}{w_N(0)} \int_{-1/2}^{1/2} w_N(\lambda) d\lambda.$$

Diese Definition basiert auf einer Leistungsäquivalenz und stimmt mit der nach Gl.(10.3) im analogen Fall überein.

Mit

$$\int_{-1/2}^{1/2} w_N(\lambda) d\lambda = w_N(0) = 1$$

auf Grund der Forderung nach Leistungskonservierung, vgl. Abschnitt 11.2, und der asymptotischen Näherung (11.17)

$$w_N(0) \approx MW(0)$$

läßt sich die äquivalente Bandbreite von algebraischen Schätzwerten nach PARZEN näherungsweise in der Form

$$\beta = \frac{1}{MW(0)} = \frac{1}{M \int w(u) du}$$

schreiben.

JENKINS /127/ schlägt vor, β als Breite eines Rechteckfensters zu definieren, das dieselbe Fläche wie $w_N(\lambda)$ besitzt und darüber hinaus auf dieselbe Varianz führt. Bezeichnet man die Höhe des äquivalenten Rechteckfensters mit h , so lautet die erste Forderung

$$\beta \cdot h = \int w_N(\lambda) d\lambda,$$

und für die Varianz eines Schätzwertes mit diesem Fenster ergibt sich nach Gl.(11.23)

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{h^2}{N} \int_{\lambda-\beta/2}^{\lambda+\beta/2} S_X^2(v) dv \approx \frac{h^2 \cdot \beta}{N} S_X^2(\lambda).$$

Durch Gleichsetzen mit der entsprechenden Näherung

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx S_X^2(\lambda) \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} w_N^2(\lambda) d\lambda$$

für Schätzwerte mit dem Spektralfenster $w_N(\lambda)$ erhält man dann näherungsweise

$$\beta = \frac{[\int w_N(\lambda) d\lambda]^2}{\int w_N^2(\lambda) d\lambda}. \quad (11.29)$$

Dieses Ergebnis stimmt formal mit der Definition der "statistischen" Bandbreite B_S bei den analogen Schätzverfahren überein, vgl. Punkt 10.2.2.

Wegen

$$\int_{-1/2}^{1/2} W_N(\lambda) d\lambda = 1$$

und der für algebraische Schätzwerte geltenden Näherung (11.27) läßt sich die äquivalente Bandbreite nach JENKINS auch in der Form

$$\beta = \frac{1}{M \int w^2(u) du} = \frac{1}{M k_v} \quad (11.30)$$

schreiben.

Dasselbe Ergebnis erhält man auf Grund der Forderung, daß die äquivalente Bandbreite von $W_N(\lambda)$ gleich der eines DANIELL-Schätzwertes mit derselben Varianz sein soll. Mit den Aussagen der Gln.(11.24) und (11.28) heißt das

$$\frac{1}{\beta N} S_x^2(\lambda) = \frac{M}{N} k_v S_x^2(\lambda) ,$$

woraus sich Gl.(11.30) unmittelbar ergibt.

Mit welcher der angegebenen Definitionen gearbeitet wird, ist im Prinzip gleichgültig; entscheidend ist eigentlich nur, daß in allen Fällen die äquivalente Bandbreite β umgekehrt proportional zu M ist. Im folgenden wird die Definition (11.30) verwendet, weil sich damit verschiedene Zusammenhänge besonders einfach darstellen lassen.

Zunächst erhält man in Verbindung mit Gl.(11.28) für die Varianz

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{\beta N} S_x^2(\lambda) \quad (11.31)$$

ein Ergebnis, das formal identisch ist mit dem entsprechenden für einen "analogen" Schätzwert. Unter der Voraussetzung, daß kein Alias-Effekt auftritt, gilt nach Gl.(8.5)

$$\hat{S}_T(f, e) = \Delta t \hat{S}_N(f \Delta t) ,$$

und mit $B = \beta \cdot \Delta t$ und $T = N \cdot \Delta t$ geht Gl.(11.31) direkt in Gl.(10.13)

$$\text{var } \hat{S}_T(f, e) \approx \frac{1}{\beta T} S_x^2(f)$$

für den "analogen" Fall über.

Unter Einbeziehung der äquivalenten Bandbreite β erhält man aus Gl.(11.19) für den Verschiebungsfehler die Beziehung

$$b \hat{S}_N(\lambda, e) \approx k_b \cdot k_v^2 \cdot \beta^2 \cdot S_x^2(\lambda), \quad (11.32)$$

die ebenfalls formal mit dem entsprechenden Ergebnis (10.8) für "analoge" Schätzwerte übereinstimmt. Wie im voranstehenden Punkt gezeigt worden ist, gehen beide Ergebnisse für den Sonderfall des DANIELL-Fensters exakt ineinander über.

Der Vergleich der Abschätzungen für die Varianz, Gl.(11.31), und für den Verschiebungsfehler, Gl.(11.32), läßt darüber hinaus die schon im Zusammenhang mit den "analogen" Schätzverfahren ausführlich diskutierte Gegenläufigkeit hinsichtlich der Anforderungen an die Bandbreite eines Schätzwertes erkennen. Diese Problematik wird sehr kompakt durch die Unschärferelation

$$\beta \cdot \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) = \frac{S_x^2(\lambda)}{N}, \quad (11.33)$$

ausgedrückt, die bereits 1951 von GRENANDER /123/ angegeben worden ist und Anlaß für eine heftige Diskussion mit anderen Autoren gewesen ist, vgl. /131,132/. Gl.(11.33) besagt, daß bei vorgegebener Datenlänge N das Produkt aus Bandbreite und Varianz - unabhängig vom Typ der Kovarianzgewichtung bzw. des Spektralfensters - konstant ist. Das heißt mit anderen Worten, daß Spektralfenster, die unter dem Gesichtspunkt eines minimalen Verschiebungsfehlers oder einer guten Auflösung konzipiert werden, zwangsläufig auf Schätzwerte mit einer großen Streuung führen und umgekehrt. Damit erscheint die zu Beginn dieses Abschnitts vereinbarte Beschränkung auf die sogenannten algebraischen Schätzwerte zusätzlich gerechtfertigt.

Zum Schluß der Ausführungen über die statistischen Eigenschaften der BT-Schätzwerte soll im nächsten Punkt eine Näherung für die Verteilungsdichte diskutiert werden.

11.2.5 Eine Näherung für die Verteilungsdichte

Der Schätzwert nach Gl.(11.13)

$$\hat{S}_N(\lambda, e) = \int_{-1/2}^{1/2} I_N(\lambda, e) W_N(\lambda - \nu) d\nu$$

entsteht durch Faltung des Periodogramms $I_N(\lambda, e)$, das für endliche N durch eine "verallgemeinerte" χ^2 -Verteilung und für $N \rightarrow \infty$ durch eine Exponentialverteilung charakterisiert wird, mit dem Spektralfenster $W_N(\lambda)$. Da bei nicht-normalverteilten Prozessen der Einfluß der Faltung auf die Verteilung i.a. analytisch nicht erfaßt werden kann, muß man sich mit einer Näherung für die Verteilungsdichte von $\hat{S}_N(\lambda, e)$ zufriedengeben.

Im folgenden werden zwei unterschiedliche Wege beschritten, um eine solche Näherung zu finden, wobei sich herausstellen wird, daß sie beide auf dasselbe Ergebnis führen. Der erste Ansatz schließt an die Überlegungen des voranstehenden Punktes an und verwendet als Näherung für $p_{\hat{S}}(u)$ die Verteilungsdichte eines DANIELL-Schätzwertes mit der äquivalenten Bandbreite β .

Der zweite Zugang basiert auf einer sehr allgemeinen und in der Statistik häufig gebrauchten Approximation der Verteilungsdichte von positiven Zufallsvariablen. Dabei wird die Verteilung des Schätzwertes $\hat{S}_N(\lambda, e)$ durch eine sogenannte $c \cdot \chi^2_\nu$ -Verteilung

$$p_{\hat{S}}(u) \approx p_{c\chi^2}(u; \nu) = \frac{1}{c} p_{\chi^2}\left(\frac{u}{c}; \nu\right)$$

angenähert, wobei der Vorfaktor c und die Zahl der Freiheitsgrade ν so bestimmt werden, daß Erwartungswert und Varianz der beiden Verteilungen übereinstimmen.

Ersetzt man in Gl.(11.13) die Fensterfunktion $W_N(\lambda)$ durch das äquivalente DANIELL-Fenster, so erhält man

$$\hat{S}_D(\lambda, e) = \frac{1}{\beta} \int_{\lambda - \beta/2}^{\lambda + \beta/2} I_N(\nu, e) d\nu$$

Um auf die Ergebnisse des Punktes 9.3.4 zurückgreifen zu können, in dem gezeigt worden ist, daß die Periodogrammwerte bei den Frequenzen $\lambda_k = k/N$ asymptotisch unabhängig voneinander sind, wird das Integral durch die Summe

$$\hat{S}_D(\lambda, e) \approx \frac{1}{K} \sum_{L-J}^{L+J} I_N(\lambda_k, e) \quad (J = \frac{K-1}{2}, K \text{ ungerade})$$

angenähert. Dabei ist $K = \lfloor N\beta \rfloor$ die Anzahl der in das Intervall $\lambda \pm \beta/2$ fallenden Periodogrammwerte an den diskreten Frequenzen λ_k und $L = \lfloor N\lambda \rfloor$ mit der Schreibweise $\lfloor z \rfloor$ für die größte ganze Zahl, die noch kleiner als z ist.

Nimmt man nun an, daß sich $S_X(\lambda)$ im Intervall $\lambda \pm \beta/2$ nur wenig ändert, so gilt

$$\xi(e) \equiv \frac{2K\hat{S}_D(\lambda, e)}{S_X(\lambda)} \approx \sum_{L-J}^{L+J} \frac{I_N(\lambda_k, e)}{S_X(\lambda)/2} \quad (11.34)$$

Im Punkt 9.3.2 ist gezeigt worden, daß das Periodogramm für $N \rightarrow \infty$ exponentialverteilt ist; dann ist die Zufallsvariable

$$\frac{I_N(\lambda, e)}{S_X(\lambda)/2}$$

asymptotisch χ^2_2 -verteilt, und es folgt mit den Ergebnissen aus Punkt 9.3.4, daß sich $\xi(e)$ gemäß Gl.(11.34) als Summe über K statistisch unabhängige χ^2_2 -verteilte Zufallsvariable ergibt und deshalb einer χ^2 -Verteilung mit $2K$ Freiheitsgraden genügt / 11/:

$$p_\xi(u) \approx \frac{1}{2^{K(K-1)!}} u^{K-1} e^{-\frac{u}{2}} 1(u) \quad .$$

Daraus ergibt sich für die Verteilungsdichte des DANIELL-Schätzwertes und damit als Näherung für die Dichte von $\hat{S}_N(\lambda, e)$

$$p_{\hat{S}}(u) \approx \frac{1}{S_X} \frac{K^k}{(K-1)!} \left(\frac{u}{S_X}\right)^{K-1} e^{-K\frac{u}{S_X}} 1(u) \quad (11.35)$$

Im Bild 11.5 ist diese Verteilungsdichtefunktion für einen Schätzwert $\hat{S}_N(\lambda, e)$ mit der Datenlänge N bzw. der Zahl der Freiheitsgrade ν als Parameter dargestellt. Grundlage für die Normierung bildet die Wahl

$$M = \frac{2}{K\nu} \cdot \sqrt{N}$$

für den Fensterkoeffizienten, der damit offensichtlich die Eigenschaften (11.7)

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow \infty \\ M/\nu \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ für } N \rightarrow \infty$$

erfüllt. Die äquivalente Bandbreite ist in diesem Fall $\beta = (2\sqrt{N})^{-1}$ und geht für $N \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen Null.

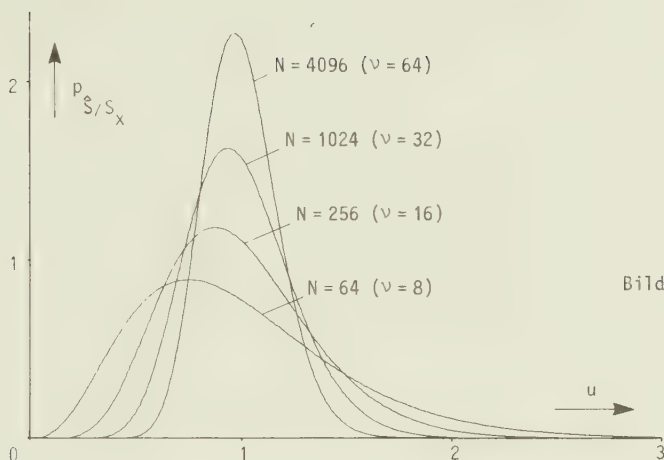


Bild 11.5

Das Ergebnis (11.35) gilt nur für $\beta < |\lambda| < 1/2 - \beta$; vgl. dazu auch die Ausführungen im Anschluß an Gl.(11.23). Für $\lambda = 0$ kann Gl.(11.34) wegen der Symmetrie von $I_N(\lambda, e)$ in die Form

$$\xi(e) \equiv \frac{K \hat{S}_D(0, e)}{\hat{S}_X(0)} \approx \sum_0^{K/2} \frac{I_N(\lambda_k, e)}{\hat{S}_X(0)/2}$$

gebracht werden, wobei der Fehler auf Grund der zweifachen Berücksichtigung von $I_N(0, e)$ für große K vernachlässigt werden kann, so daß $\xi(e)$ in diesem Fall durch eine χ_K^2 -Verteilung charakterisiert wird. Dasselbe gilt auf Grund der Periodizität von $I_N(\lambda, e)$ auch für $\lambda = \pm 1/2$. Damit erhält man als Näherung für die Verteilungsdichte $\hat{S}_N(\lambda, e)$ für $\lambda = 0$ und $\pm 1/2$

$$p_{\hat{S}}(u) \approx \frac{1}{\hat{S}_X} \frac{1}{2^{K/2} (K/2-1)!} \left(\frac{u}{\hat{S}_X}\right)^{K/2-1} e^{-\frac{Ku}{2\hat{S}_X}} 1(u),$$

wobei der Einfachheit halber angenommen werden soll, daß K gerade ist.

Zu den selben Ergebnissen gelangt man, wenn $p_{\hat{S}}(u)$ durch eine $c\chi_v^2$ -Verteilung so approximiert wird, daß die beiden ersten Momente der Verteilungen übereinstimmen:

$$\begin{aligned} E \hat{S}_N(\lambda, e) &= c \cdot v \\ \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) &= 2 c^2 v \end{aligned}$$

Für hinreichend große N und "glatte" Spektren kann im Rahmen dieser Näherungsbetrachtungen der Verschiebungsfehler vernachlässigt werden, so daß

sich in Verbindung mit Gl.11.28)

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \hat{S}_X^2(\lambda) \cdot \frac{M}{N} \cdot k_V,$$

für den Vorfaktor

$$c \approx \frac{S_X(\lambda)}{2} \frac{M \cdot k_V}{N}$$

und für die Zahl der Freiheitsgrade

$$v \approx 2 \left\lfloor \frac{N}{M \cdot k_N} \right\rfloor$$

ergibt. Beachtet man, daß nach Gl.(11.30)

$$M \cdot k_V = \frac{1}{\beta}$$

ist, so folgt daraus mit $K = \lfloor N\beta \rfloor$

$$c \approx \frac{S_X(\lambda)}{2K}$$

und

$$v \approx 2 \lfloor N\beta \rfloor = 2K.$$

Damit erhält man für $p_S(u)$ ebenfalls das Ergebnis (11.35). Der Grund für die Übereinstimmung der beiden Näherungen liegt letztlich in der zugrundeliegenden Definition für die äquivalente Bandbreite β , wobei insbesondere der dritte Zugang auf Grund der Forderung, daß die Varianz des Schätzwertes $\hat{S}_N(\lambda, e)$ gleich der eines DANIELL-Schätzwertes mit der Bandbreite β sein soll, die Verbindung zwischen den beiden Wegen deutlich macht.

Auf der Grundlage dieser Näherung für $p_S(u)$ lassen sich nunmehr auch Vertrauensintervalle für den Schätzwert $\hat{S}_N(\lambda, e)$ angeben. Nach den Aussagen in Abschnitt 9.1 wird ein Vertrauensintervall auf der Grundlage einer Irrtumswahrscheinlichkeit α durch die Bedingungen

$$\mathcal{W}\{v_u \leq \hat{S}_N(\lambda, e) \leq v_o\} = 1 - \alpha$$

bzw.

$$\mathcal{W}\left\{\frac{v \cdot v_u}{S_X(\lambda)} \leq \frac{v \cdot \hat{S}_N(\lambda, e)}{S_X(\lambda)} \leq \frac{v \cdot v_o}{S_X(\lambda)}\right\} = 1 - \alpha$$

definiert. Beachtet man, daß die normierte Zufallsvariable

$$\frac{v \cdot \hat{S}_N(\lambda, e)}{S_X(\lambda)}$$

auf Grund der voranstehenden Überlegungen χ^2_{ν} -verteilt ist, so können die normierten Intervallgrenzen

$$\gamma_u = \frac{\nu \cdot \nu_u}{S_x(\lambda)} \quad \text{und} \quad \gamma_o = \frac{\nu \cdot \nu_o}{S_x(\lambda)} \quad (11.36)$$

aus einschlägigen Tabellen zur χ^2 -Verteilung entnommen werden.

Zum Abschluß dieses Punktes soll ein einfaches Beispiel angegeben werden, das bereits im Zusammenhang mit einer analogen Schätzung verwendet worden ist, vgl. Punkt 10.5.1. Damals ist das Vertrauensintervall $S_x(f) \pm 0,2 S_x(f)$ für einen Schätzwert $\hat{S}_T(f,e)$ auf Grund der Daten

Meßzeit	$T = 100 \text{ s}$
Filterbandbreite	$B = 1 \text{ Hz}$
Irrtumswahrscheinlichkeit	$\alpha = 0,05$

und der Annahme, daß der Schätzwert näherungsweise normalverteilt ist, bestimmt worden.

Führt man dieselbe Spektralanalyse digital durch, so wird für einen geforderten Frequenzbereich $1 \text{ Hz} \leq f < 50 \text{ Hz}$ eine Abtastfrequenz $f_{ab} = 100 \text{ Hz}$ benötigt, und man kommt auf

$$N = T \cdot f_{ab} = 10000$$

und

$$\beta = B \cdot \Delta t = \frac{B}{f_{ab}} = 0,01.$$

Damit ergibt sich für die Zahl der Freiheitsgrade dieses Schätzwertes

$$\nu = 2N \cdot \beta = 200,$$

so daß man bei symmetrischer Aufteilung der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ aus einer Tabelle, z.B. / 22/

$$\gamma_u = 162,7 \quad \text{und} \quad \gamma_o = 241,1$$

entnehmen kann. Daraus erhält man mit den Beziehungen (11.36) das Vertrauensintervall

$$0,81 S_x(\lambda) \leq \hat{S}_x(\lambda, e) \leq 1,21 S_x(\lambda),$$

das bei gleicher Größe nur unwesentlich verschoben ist gegenüber dem auf Grund der vereinfachenden Annahme, daß der Schätzwert wegen der im Vergleich zu $1/B = 1 \text{ s}$ großen Meßzeit von $T = 100 \text{ s}$ normalverteilt ist.

Mit diesen Näherungen für Vertrauensintervalle der Schätzwerte nach Gl.(11.12) oder (11.13) sollen die allgemeinen Untersuchungen über die statistischen Eigenschaften abgeschlossen sein. Im folgenden Abschnitt werden verschiedene gebräuchliche Kovarianzgewichte bzw. Spektralfenster hinsichtlich ihres Einflusses auf den Verschiebungsfehler und die Varianz einer Schätzung sowie andere Eigenschaften untersucht und miteinander verglichen.

11.2.6 Vergleich einiger Kovarianzgewichte und Spektralfenster

Nachdem in den voranstehenden Punkten der Einfluß der Kovarianzgewichtung bzw. des zugehörigen Spektralfensters auf die statistischen Eigenschaften der Schätzwerte allgemein untersucht worden ist, sollen im folgenden die wesentlichen Kenngrößen für verschiedene Schätzwerte konkret bestimmt und miteinander verglichen werden. Die Auswahl orientiert sich dabei weniger an der Güte der dargestellten Fenster als vielmehr an der Möglichkeit, bestimmte Eigenschaften und Zusammenhänge deutlich zu machen. Aus diesem Grund werden auch bewußt einige der sogenannten klassischen Fensterfunktionen in die Überlegungen einbezogen.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 11.1 und 11.2 zusammengestellt, wobei neben

$$k_D = \frac{1}{2} \int v^2 W(v) dv = -\frac{1}{8\pi^2} W''(0) ,$$

$$k_V = \int W^2(v) dv = \int W^2(u) du$$

und

$$\beta = \frac{1}{M \cdot k_V}$$

als Maße für den Verschiebungsfehler, die Varianz und die Auflösung der Schätzwerte zwei weitere Kenngrößen κ und α aufgeführt sind, durch die das "Verhalten" der Nebenmaxima in den Spektralfenstern charakterisiert wird. Durch die Seitenmaxima in $W_N(\lambda)$ kommt es zu dem im Punkt 11.2.1 beschriebenen Effekt der Leistungsverflebung.

Es ist

$$\kappa = 10 \lg \frac{|W_{\max}(\lambda \neq 0)|}{W(0)} [\text{dB}]$$

das Verhältnis des größten Nebenmaximums zum Hauptmaximum, während α angibt, wie die Seitenmaxima für große Frequenzen abklingen. Dabei gilt, daß der Abfall mit λ^{-n} erfolgt, wenn $w(u)$ zum ersten Mal in der $(n-1)$ -ten Ableitung unstetig wird.

Im folgenden werden die in den Tabellen 11.1 und 11.2 aufgeführten Kovarianzgewichte und die zugehörigen Spektralfenster etwas eingehender behandelt, wobei insbesondere auch auf Zusammenhänge untereinander und auf die Hintergründe für die Konstruktion und den Einsatz dieser Fensterfunktionen eingegangen wird.

Im Bild 11.6 sind die "erzeugenden" Funktionen $w(u)$ für die Kovarianzgewichte 1 bis 6 dargestellt. Der in der 7. Zeile der Tabellen aufgeführte DANIELL-Schätzwert besitzt im Gegensatz zu allen anderen Beispielen keine "beschnittene" Kovarianzgewichtung gemäß Gl.(11.9); auf die Darstellung von

$$w(u) = \frac{\sin \pi u}{\pi u}$$

wird aus zeichentechnischen Gründen verzichtet.

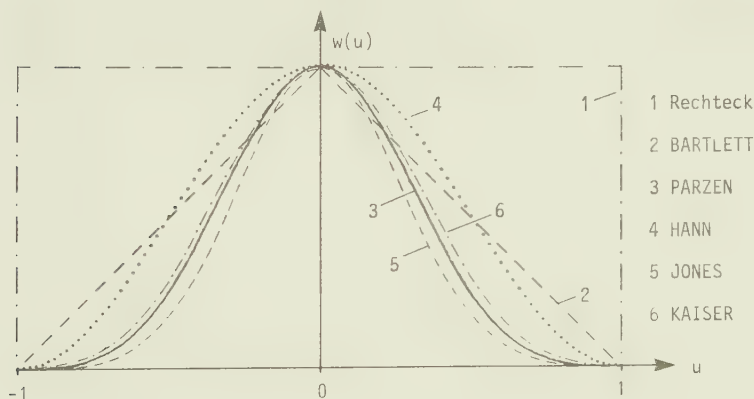


Bild 11.6

1) Die Rechteck-Gewichtung

Diese auf BARTLETT zurückgehende Kovarianzgewichtung ist historisch gesehen die erste, mit der ein indirekter Spektralschätzwert berechnet worden ist. Im Bild 11.7 ist das zugehörige Spektralfenster dargestellt; um einen Vergleich mit solchen Fenstern durchführen zu können, bei denen die Seitenmaxima weniger ausgeprägt sind, ist neben der linearen auch die logarithmische Darstellung

$$L(\lambda) = 10 \lg \frac{|w_M(\lambda)|}{w_M(0)} \quad [\text{dB}]$$

angegeben.

NR.	NAME	$w(u)$ für $ u \leq 1$	k_b	k_v	B	$\frac{K}{dB}$	α	positiv semidef.
1	RECHTECK DIRICHLET	1	0^*	2	$\frac{0,5}{M}$	-6,7	$\frac{1}{\lambda}$	nein
2	BARTLEIT DREIECK FÉJÉR	$1 - u $	- $w''(0)$ n.e.	0,67	$\frac{1,5}{M}$	-13,5	$\frac{1}{\lambda^2}$	ja
3	PARZEN DE LA VALLÉE- POUSSIN	$1 - 6 u ^2 + 6 u ^3$ $ u \leq \frac{1}{2}$ $2(1 - u)^3$ $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$	0,152	0,54	$\frac{1,85}{M}$	-25,9	$\frac{1}{\lambda^4}$	ja
4	HANN $\cos^2$	$\frac{\cos^2 \frac{\pi u}{2}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi u)$	0,063*	0,75	$\frac{1,33}{M}$	-15,7	$\frac{1}{\lambda^3}$	nein
5	GAUSS JONES	e^{-au^2} $a = 1n 1000 \approx 6,91$	0,175	0,48	$\frac{2,1}{M}$	<-40	$\frac{1}{\lambda}$	nein
6	KAISER BESSEL-sh	$\frac{I_0(a\sqrt{1-u^2})}{I_0(a)}$ $a = 3\pi$	0,113	0,58	$\frac{1,7}{M}$	-34,8	$\frac{1}{\lambda}$	nein
7	DANIELL	$\frac{\sin \pi u}{\pi u}$ $-\infty < u < \infty$	0,042	1	$\frac{1}{M}$	-	-	ja

Tabelle 11.1

NR.	NAME	$W(v)$	$W_M(\lambda)$
1	RECHTECK DIRICHLET	$\frac{\sin 2\pi v}{\pi v}$	$\frac{\sin \pi(2M+1)\lambda}{\sin \pi \lambda}$
2	BARTLETT DREIECK FÉJÉR	$\frac{\sin^2 \frac{\pi v}{2}}{\pi v}$	$\frac{\sin^2 \pi M \lambda}{M \sin \pi \lambda}$
3	PARZEN DE LA VALLÉE- POUSSIN	$3 \left[\frac{\sin \frac{\pi v}{2}}{\frac{\pi v}{2}} \right]^4$	$\frac{3M}{4} \left[\frac{\sin \pi M \frac{\lambda}{2}}{M \sin \pi \frac{\lambda}{2}} \right]^4$
4	HANN $\cos^2$	$\frac{\sin 2\pi v}{2\pi v} \frac{1}{1-4v^2}$	$\frac{1}{2} \frac{\sin \pi(2M+1)\lambda}{\sin \pi \lambda} + \frac{1}{4} \frac{\sin \pi(2M+1)(\lambda-1/2M)}{\sin \pi(\lambda-1/2M)} + \frac{1}{4} \frac{\sin \pi(2M+1)(\lambda+1/2M)}{\sin \pi(\lambda+1/2M)}$
5	GAUSS JONES	$\approx \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 v^2}{a}}$	$\approx \sqrt{\frac{\pi}{a}} M e^{-\frac{M^2 \pi^2 \lambda^2}{a}}$
6	KAISER BESSEL-sh	$\frac{2 \operatorname{sh} \sqrt{a^2 - (2\pi v)^2}}{I_0(a) \sqrt{a^2 - (2\pi v)^2}}$	$\frac{2M \operatorname{sh} \sqrt{a^2 - (2\pi M \lambda)^2}}{I_0(a) \sqrt{a^2 - (2\pi M \lambda)^2}}$
7	DANIELL	1 für $ v \leq \frac{1}{2}$ 0 sonst	M für $ \lambda \leq \frac{1}{2M}$ 0 sonst

Tabelle 11.2

Da im vorliegenden Fall bereits $w(u)$ unstetig ist, klingen die Seitenmaxima nur mit λ^{-1} ab.

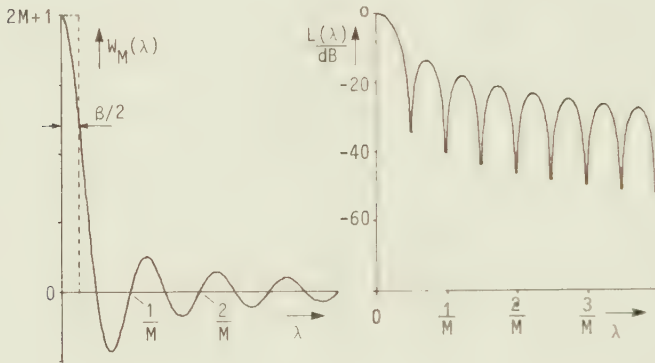


Bild 11.7

Mit

$$k_v = \int_{-1}^1 w^2(u) du = \int_{-1}^1 du = 2$$

erhält man für die äquivalente Bandbreite

$$\beta = \frac{1}{M k_v} = \frac{1}{2M} ;$$

dies ist bei vergleichbaren Fensterkoeffizienten M die kleinste erreichbare Bandbreite. Auf Grund der ausgeprägten Seitenmaxima wird dieses Fenster jedoch praktisch kaum eingesetzt.

2) Die Dreiecks-Gewichtung

Die Dreiecks-Gewichtung ist ebenfalls von BARTLETT vorgeschlagen worden und wird deshalb auch BARLETT- oder FÉJER-Gewichtung genannt. Der letztere Name rührt daher, daß die FOURIER-Transformierte

$$W(v) = \int w(u) e^{-j2\pi uv} du = \frac{\sin^2 \pi v}{\pi v}$$

der sogenannte FÉJERsche Kern ist / 6 /. Das zugehörige Spektralfenster ist in Bild 11.8 dargestellt.

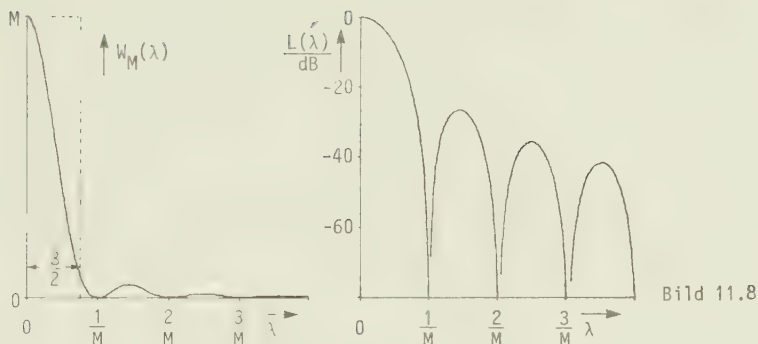


Bild 11.8

Da $w(u)$ stetig und erst $w'(u)$ unstetig ist, fallen die Seitenmaxima mit λ^{-2} ab; gleichzeitig ist κ auf -13,5 dB zurückgegangen.

Dieses "verbesserte" Verhalten der Nebenmaxima wird aber durch eine Vergrößerung der äquivalenten Bandbreite und damit durch eine Verschlechterung der Auflösung erkauft. Mit

$$k_v = \int W^*(v) dv = \int \frac{\sin \frac{\pi v}{M}}{\pi v} dv = \frac{2}{3}$$

erhält man die im Vergleich zum Rechteckfenster um den Faktor 3 größere Bandbreite

$$\beta = \frac{3}{2M}$$

3) Die PARZEN-Gewichtung

Die Dreiecksgewichtung entsteht durch Faltung eines Rechtecks der halben Länge mit sich selbst. Entsprechend kommt man durch Faltung eines Dreiecks auf ein neues Fenster, das bezüglich der Seitenmaxima noch günstigere Eigenschaften aufweist. Dies ist die sogenannte PARZEN- oder DE LA VALLÉ-POUSSIN-Gewichtung /168/, die sich aus zwei Parabelästen zusammensetzt, vgl. Bild 11.6. Das zugehörige Spektralfenster ist im Bild 11.9 dargestellt, wobei deutlich die Verringerung der Nebenmaxima zu erkennen ist, die außerdem mit λ^{-4} abfallen, weil erst die 3. Ableitung von $w(u)$ unstetig wird.

Beachtet man, daß sich mit

$$k_v = \int W^2(v) dv = \frac{144}{\pi} \int \frac{\sin^2 \frac{8\pi}{2} v}{v^8} dv = \frac{151}{280} \approx 0,54$$

nur eine relativ geringe Vergrößerung der äquivalenten Bandbreite auf

$$\beta = \frac{280}{151M} \approx \frac{1,85}{M}$$

ergibt, stellt das PARZEN-Fenster einen günstigen Kompromiß zwischen Auflösung und Verhalten der Nebenmaxima dar. Da $W(v) \geq 0$ ist, liefert Gl.(11.19) mit

$$k_b = \frac{3}{2\pi^2} \approx 0,152$$

eine brauchbare Abschätzung für den Verschiebungsfehler, und weil außerdem $w_M(k)$ vergleichsweise einfach zu berechnen ist, wird die PARZEN-Gewichtung in der Praxis häufig eingesetzt.

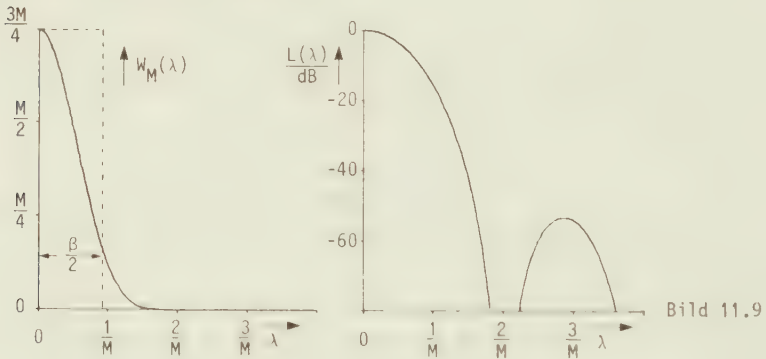


Bild 11.9

4) Die HANN-Gewichtung

Diese von TUKEY vorgeschlagene Kovarianzgewichtung mit

$$w(u) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi u}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \pi u) & \text{für } |u| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

kann sowohl den sogenannten $\cos^n$ -Gewichtungen als auch der Klasse von Kovarianzgewichten mit

$$w(u) = a + (1-a) \cos \pi u \quad (11.37)$$

für $a = 0,5$ zugeordnet werden. TUKEY hat diese Gewichtung nach dem österreichischen Meteorologen Julius von HANN benannt /118/; der häufig verwen-

der Begriff "hanning" kennzeichnet den Gebrauch dieser Kovarianzgewichtung oder des zugehörigen Spektralfensters, das in Bild 11.10 dargestellt ist.¹⁾

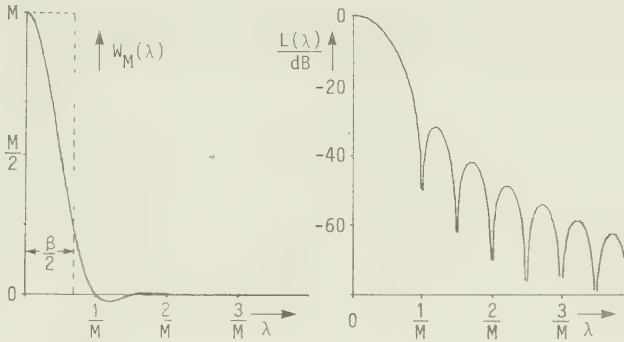


Bild 11.10

Die HANN-Gewichtung ist ein Beispiel dafür, daß die mit

$$k_b = -\frac{1}{8\pi^2} W''(0) = \frac{1}{16}$$

erhaltene Näherung für den Verschiebungsfehler

$$b \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{16M^2} S_X''(\lambda)$$

etwas zu günstig ausfällt, weil der relativ kleine k_b -Wert teilweise auf die negativen Seitenmaxima zurückzuführen ist.

Dies wird besonders deutlich, wenn man die Verschiebungsfehler verschiedener Schätzwerte mit derselben äquivalenten Bandbreite und damit nach Gl.(11.31) auch derselben Varianz miteinander vergleicht. Dazu wird zweckmäßigerweise von der Beziehung (11.32)

$$b \hat{S}_N(\lambda, e) \approx k_b k_v^2 \beta^2 S_X''(\lambda)$$

1) Demgegenüber ist die sogenannte HAMMING-Gewichtung, die sich aus Gl. (11.37) für $a = 0.54$ ergibt, nach R.W. HAMMING benannt [118]. Der Parameter a ist dabei so gewählt, daß sich im Vergleich zur HANN-Gewichtung für K ein günstigerer Wert ($K = -21.6$ dB) ergibt.

ausgegangen und das Produkt $k_b \cdot k_v^2$ für den Vergleich herangezogen; die Ergebnisse sind in der Tabelle 11.3 zusammengestellt. Man erkennt, daß das $k_b \cdot k_v^2$ -Produkt der HANN-Gewichtung nicht nur kleiner ist als das der positiv semidefiniten Kovarianzgewichte 3 und 7, sondern auch kleiner als das der nicht positiv semidefiniten GAUSS- und KAISER-Gewichtungen, bei denen aber die Nebenmaxima mit $\kappa < -40$ dB bzw. $\kappa = -34,8$ dB deutlich schwächer ausgebildet sind.

Nr.	N a m e	$k_b \cdot k_v^2$	positiv semidefinit	κ /dB
3	PARZEN	0,044	ja	-26,5
4	TUKEY-HANN	0,035	nein	-15,5
5	GAUSS-JONES	0,04	nein	< -40
6	KAISER-BESSEL	0,038	nein	-34,8
7	DANIELL	0,042	ja	-

Tabelle 11.3

Die praktische Bedeutung der HANN-Gewichtung ist in rechtechnischen Vorzügen begründet. Zum einen ist für die indirekte Berechnung von Spektralschätzwerten kein zusätzlicher Speicherbedarf für $w_M(k)$ erforderlich, weil die benötigten cos-Werte ohnehin für die FFT abgespeichert sind, zum anderen gestaltet sich bei der direkten Methode nach Gl.(11.13) die Faltung des Periodogramms mit dem Spektralfenster für diskrete Frequenzen $\lambda_1 = 1/2M$ extrem einfach. Es zeigt sich nämlich, daß in diesem Fall das Spektralfenster nur an 3 Stützstellen ungleich Null ist:

$$w_M\left(\frac{l}{2M}\right) = \begin{cases} M & \text{für } l = 0 \\ \frac{M}{2} & \text{für } l = \pm 1 \\ 0 & \text{für } |l| > 1 \end{cases}$$

Damit kann die Faltung in der Form

$$\hat{S}_N\left(\frac{1}{2M}\right) = M \left\{ I_N\left(\frac{1}{2M}\right) + \frac{1}{2} \left[I_N\left(\frac{1-1}{2M}\right) + I_N\left(\frac{1+1}{2M}\right) \right] \right\}$$

dargestellt werden, die abgesehen davon, daß pro Meßpunkt jeweils nur 3 Periodogrammwerte benötigt werden, rechtechnisch deshalb besonders günstig ist, weil anstelle der Multiplikation mit dem Faktor 1/2 eine binäre "SHIFT-Operation" verwendet werden kann.

5) Die GAUSS-Gewichtung

Bei der Diskussion der PARZEN-Gewichtung ist bemerkt worden, daß durch Faltung mit sich selbst und geeigneter Normierung neue Kovarianzgewichte entstehen, deren Spektralfenster zunehmend günstigere Eigenschaften bezüglich der Seitenmaxima aufweisen. Diese Vorgehensweise führt im Grenzfall auf eine Gewichtung in Form der GAUSS'schen Glockenkurve, die strenggenommen nicht zur Klasse der "beschnittenen" Kovarianzgewichte gehört, weil

$$w(u) = e^{-au^2} \neq 0 \quad \text{für } |u| > 1$$

ist. Sorgt man jedoch durch geeignete Wahl von a dafür, daß

$$w(u) < \epsilon \quad \text{für } |u| > 1$$

ist, das heißt $a = -\ln \epsilon$, so kann der Fehler auf Grund der Beschneidung bei $u = \pm 1$ praktisch vernachlässigt werden und

$$W_M(\lambda) \approx \sqrt{\frac{\pi}{a}} M e^{-\frac{(\pi M \lambda)^2}{a}}$$

stellt eine gute Approximation des zugehörigen Spektralfensters dar. Für die Darstellungen in den Bildern 11.6 und 11.11 ist $\epsilon = 1/1000$ und damit $a = \ln 1000 \approx 6,9$ gewählt worden.

Auf Grund der relativ großen Bandbreite

$$\beta = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot \frac{1}{M} \approx \frac{2,1}{M}$$

ist die Varianz dieses Schätzwertes entsprechend klein ($k_v \approx 0,48$ - dies ist der kleinste Wert aller hier betrachteten Beispiele) und der Verschiebungsfehler relativ groß, was durch

$$k_b = \frac{a}{4\pi^2} \approx 0,17 \quad (a = \ln 1000)$$

zum Ausdruck kommt. Da k sehr klein ist, kann mit der Näherung für den Verschiebungsfehler gearbeitet werden, obgleich $W(v)$ negative Werte annimmt. JONES /169/ hat für die Berechnung der Kovarianzgewichte $w_M(k)$ die folgende Rekursion angegeben

$$w_M(0) = 1$$

$$w_M(k) = \frac{L+1-k}{L+k} w_M(k-1), \quad k = 1, 2, \dots, M$$

wobei

$$L = \lfloor M^2/a \rfloor = \lfloor -M^2/\ln \epsilon \rfloor$$

ist und $[z]$ die größte ganze Zahl ist, die noch kleiner als z ist.

Man kann zeigen, daß sich die GAUSS-Gewichtung auch auf Grund der Forderung ergibt, daß das "Zeitdauer-Bandbreite"-Produkt minimal wird. Hierbei sind die "Dauer" von $w(u)$ und die "Breite" von $W(v)$ in geeigneter Weise als Momente 2. Ordnung zu definieren / 39/.

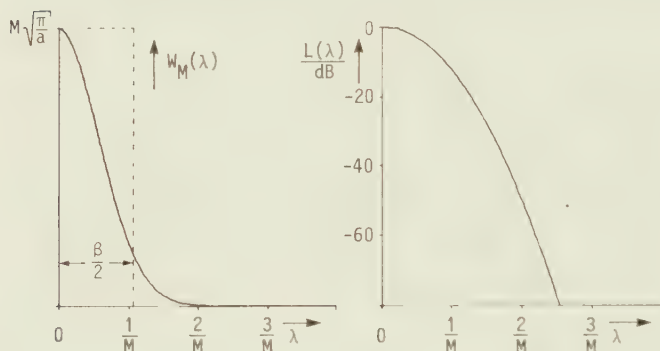


Bild 11.11

7) Die KAISER-Gewichtung

Ein anderes Beispiel für eine "optimale" Kovarianzgewichtung ist die von KAISER /170/ angegebene Näherung

$$w(u) = \begin{cases} \frac{I_0[a\sqrt{1-u^2}]}{I_0(a)} & \text{für } |u| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für eine sogenannte "prolate Sphäroidfunktion", / 1, 27/, die sich als Lösung der folgenden Fragestellung ergibt: Welche Funktion $w(u)$ mit $w(u) \geq 0$ für $|u| > 1$ besitzt eine FOURIER-Transformierte $W(v)$, deren "Energie"

$$\int_{-1}^1 W'(v) dv = \int_{-1}^1 W'(u) du$$

möglichst stark in der Umgebung von $v = 0$ konzentriert ist /291/? Das zugehörige Spektralfenster $W_M(\lambda)$ ist im Bild 11.12 für $a = 3\pi$ dargestellt.

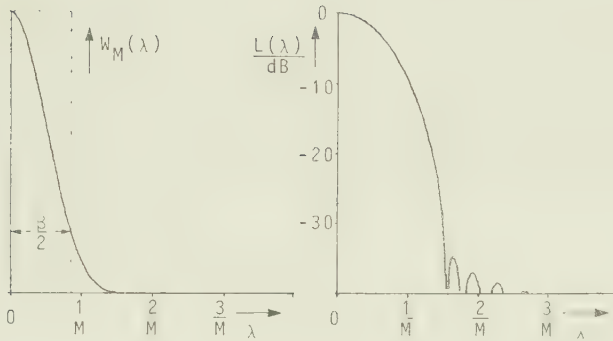


Bild 11.12

Ergänzend zu den Angaben in der Tabelle 11.2 sei darauf hingewiesen, daß für $2\pi M\lambda > a$ zweckmäßig mit der Form

$$W_M(\lambda) \approx \frac{2M \sin \sqrt{(2\pi M\lambda)^2 - a^2}}{I_0(a) \sqrt{(2\pi M\lambda)^2 - a^2}}$$

gearbeitet wird. Über die zugrundeliegende Optimalität hinaus besteht ein Vorteil dieses Fensters darin, daß mit dem Parameter a jeder gewünschte Kompromiß zwischen Bandbreite β und κ , dem Verhältnis des größten Seiten- zum Hauptmaximum, hergestellt werden kann.

Mit $I_0'(x) = I_1(x)$ erhält man

$$w''(u) = -a \frac{I_1(a)}{I_0(a)},$$

womit sich für $a = 3\pi$

$$k_b = \frac{a}{8\pi^2} \cdot \frac{I_1(a)}{I_0(a)} \approx 0,113$$

ergibt. Die analytische Berechnung von k_v ist nicht so einfach; der in Tabelle 11.1 enthaltene Wert ist numerisch berechnet worden.

8) Das DANIELL-Fenster

Auf das DANIELL-Fenster, das ausschließlich für die direkte Berechnung von Leistungsdichteschätzwerten nach Gl.11.13 von Bedeutung ist, soll nur noch kurz eingegangen werden, weil es bisher wiederholt als Beispiel verwendet worden ist. Bemerkenswert erscheint jedoch, daß dieses Fenster scheinbar ideales Verhalten bezüglich der Nebenmaxima aufweist. Dabei muß aber beachtet werden, daß sich der Einfluß der endlichen Datenlänge auf das effektive Frequenzfenster

$$W_e(\lambda) = W_M(\lambda) * |D_N(\lambda)|^2,$$

vgl. Punkt 11.2.1, stärker bemerkbar macht als bei Fenstern mit einer "weichen" Bandbegrenzung. Dies wird aus Bild 11.13

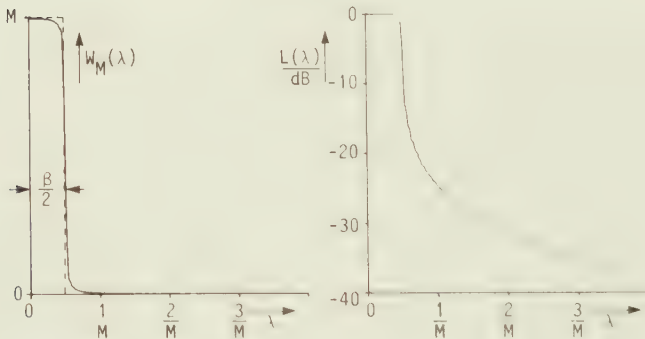


Bild 11.13

deutlich, in dem die Verhältnisse für $N = 512$ und $M = 26$ dargestellt sind. Der Abfall der Seitenmaxima wird von $|D_N(\lambda)|^2$ bestimmt und erfolgt mit λ^{-2} . Um die Vorteile des DANIELL-Fensters besser zu nutzen, sollte es nur in Verbindung mit geeigneten nichtkonstanten Datengewichtungen verwendet werden. Auf diese Zusammenhänge wird im Punkt 11.3.1 eingegangen.

11.2.7 Überlegungen zur Planung einer Spektralanalyse

In der Literatur sind verschiedene Vorschläge gemacht worden, wie man ausgehend von bestimmten Anforderungen eine Spektralschätzung planen kann / 21, 118, 127, 134, 136/. Die folgende kurze Darstellung geht von der Frage aus, bis zu welcher maximalen Frequenz f_m und mit welcher Auflösung das Spektrum analysiert werden soll. Als Auflösung wird dabei entsprechend den Ausführungen in Punkt 10.5.2 die Breite Δf von spektralen Details wie z.B. Resonanzüberhöhungen verstanden, die man mit der Schätzung gerade noch nachweisen können möchte.

Aus der maximalen Analysierfrequenz f_m ergibt sich die auf Grund des Abtasttheorems benötigte Abtastfrequenz

$$f_{ab} = \frac{1}{\Delta t} \geq 2 f_m, \quad (11.38)$$

wobei es zur Vermeidung von Alias-Fehlern sinnvoll ist, vor der Abtastung mit einem geeigneten Tiefpaß (anti-aliasing-filter) dafür zu sorgen, daß in dem Meßsignal keine wesentlichen Spektralanteile im Bereich $f > f_m$ enthalten sind.

Aus der gewünschten Auflösung Δf und dem Abtastintervall Δt ergibt sich die benötigte äquivalente Bandbreite des Spektrafensters

$$\beta \leq \Delta f \cdot \Delta t. \quad (11.39)$$

Als weitere Randbedingung für die Schätzung sei ein zulässiger statistischer Fehler in Form der relativen Varianz gefordert, die sich aus Gl.(11.31) zu

$$\eta^2 = \frac{\text{var} \hat{S}_N(\lambda, e)}{S_X^2(\lambda)} \approx \frac{1}{fN} \quad (11.40)$$

ergibt; dabei ist $\lambda = f \cdot \Delta t$. Bei Vernachlässigung des Verschiebungsfehlers entspricht η^2 dem relativen Schätzfehler im quadratischen Mittel ε^2 , vgl. Punkt 10.2.2. Aus den Gln.(11.39) und (11.40) erhält man die Anzahl der benötigten Abtastwerte

$$N \geq \frac{1}{\beta \cdot \eta^2} = \frac{1}{\Delta f \cdot \Delta t \cdot \eta^2},$$

ohne daß irgendwelche Angaben bezüglich einer bestimmten Kovarianzgewichtung oder eines Spektrafensters gemacht werden müssen. Diese gehen erst bei der Festlegung des Fensterkoeffizienten M , der sowohl für eine indirekte als auch für eine direkte Schätzung benötigt wird, über die Konstante k_v in die Planung ein; dabei gilt:

$$M = \frac{1}{k_V \cdot \beta} = \frac{1}{k_V \Delta f \cdot \Delta t} \quad (11.41)$$

Bei dieser Vorgehensweise wird der Verschiebungsfehler nicht berücksichtigt, weil i.a. keinerlei Information über die zweite Ableitung des zu schätzenden Spektrums zur Verfügung steht. Man kann also erst anhand des geschätzten Spektrums entscheiden, ob auf Grund von Spitzen oder ausgeprägten Einbrüchen mit größeren Verschiebungsfehlern zu rechnen ist und ob ggf. nach einer geeigneten Vorfilterung eine zweite Berechnung durchgeführt werden muß.

Abschließend sollen die erforderlichen Schritte anhand eines bereits im Zusammenhang mit den analogen Schätzverfahren verwendeten Beispiels konkret durchgeführt werden.

1) Das Spektrum

$$S_X(f) = \frac{S_0}{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + 4D^2 \frac{f^2}{f_0^2}} \quad (f_0 = 10 \text{ Hz}, D = 0,1)$$

soll bis zu einer Frequenz $f_m = 50 \text{ Hz}$ geschätzt werden; daraus folgt

$$f_{ab} = 2 f_m = 100 \text{ Hz} \quad \text{bzw.} \quad \Delta t = 0,01 \text{ sec},$$

wenn in Gl.(10.38) mit dem Gleichheitszeichen gearbeitet wird.

2) Dabei sollen noch spektrale Details in der Größenordnung von $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ aufgelöst werden, so daß der Schätzwert eine äquivalente Bandbreite von

$$\beta = \Delta f \cdot \Delta t = 0,01$$

besitzen muß.

3) Bei einer relativen Varianz von $\eta^2 = 0,01$, was einer Streuung von 10% entspricht, werden

$$N = \frac{1}{\beta \cdot \eta^2} = 10\,000$$

Abtastwerte und damit eine Meßsignaldauer von

$$T = N \cdot \Delta t = 100 \text{ s}$$

benötigt.

4) Für den Fensterkoeffizienten M erhält man schließlich aus Gl.(11.41)

$$M = \frac{100}{k_V} \approx 185,$$

wenn man die PARZEN-Gewichtung mit $k_V = 0,54$ für eine indirekt durchzuführende Schätzung zugrundelegt.

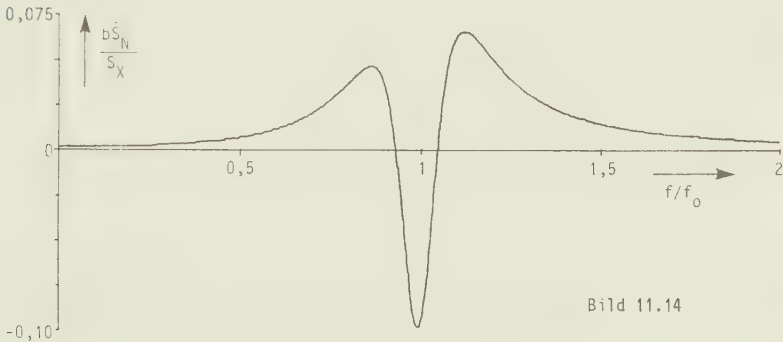
5) Ohne Vorfilterung ergäbe sich mit $k_b = 0,152$ ein Verschiebungsfehler

$$b \hat{S}_N(\lambda, e) \approx k_b k_v^2 \beta^2 S_X''(\lambda) \approx 4,4 \cdot 10^{-6} S_X''(\lambda)$$

bzw. im Originalfrequenzbereich

$$b \hat{S}_N(f, e) \approx 0,044 \cdot S_X''(f) ,$$

der bezogen auf $S_X(f)$ im Bild 11.14 dargestellt ist. Bei der Resonanzfrequenz beträgt die maximale Abweichung ungefähr -0,088, d.h. daß die Resonanzüberhöhung um etwa 9% unterschätzt wird. Damit ergibt sich für den Schätzfehler im quadratischen Mittel auf Grund der Verschiebung ein Anteil von etwa 0,008, der in der Größenordnung von $\eta^2 = 0,01$ liegt. Bei dieser Schätzung wäre demnach eine Vorfilterung der Daten nicht unbedingt erforderlich.



11.2.8 Einige Anmerkungen zum Gebrauch der DFT

Bei der praktischen Durchführung einer Leistungsdichteschätzung können die spektralen Kenngrößen nur für diskrete Frequenzen λ_1 berechnet werden. Dabei ist eine gewisse Sorgfalt bei der Interpretation des aus dem diskreten Periodogramm gewonnenen Schätzwertes für die Kovarianzfolge geboten.

Ausgehend von einem Datensatz $x_N(n)$ der Länge N ist es naheliegend, das Periodogramm über eine Diskrete-FOURIER-Transformation (DFT) der Länge N zu berechnen:

$$I_N\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n) e^{-j2\pi \frac{1n}{N}} \right|^2, \quad 0 \leq l < N. \quad (11.42)$$

Unter statistischen Gesichtspunkten ist der resultierende Frequenzabstand $\Delta\lambda = 1/N$ sogar besonders günstig, weil die Periodogrammwerte bei Vielfachen von $\Delta\lambda$ für große N statistisch unabhängig voneinander sind, vgl. Punkt 9.3.4. Versucht man jedoch, mit Hilfe einer inversen DFT aus $I_N(\frac{1}{N})$ einen Schätzwert für die Kovarianzfolge zu berechnen, so erhält man nicht

$$\hat{c}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x(n) x(n+|k|) ,$$

wie es auf Grund der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung (9.12) zu erwarten ist, sondern eine sogenannte "zirkulare" Kovarianzfunktion $\hat{c}_N^c(k)$. Dies kann sehr einfach gezeigt werden, indem Gl.(11.42) als Doppelsumme

$$I_N(\frac{1}{N}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n) x(m) e^{-j2\pi \frac{(m-n)l}{N}} .$$

geschrieben und $m-n=k$ substituiert wird:

$$I_N(\frac{1}{N}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{N-1-n} x(n) x(n+k) e^{-j2\pi \frac{k l}{N}} .$$

Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge ergibt sich daraus

$$I_N(\frac{1}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k l}{N}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n) x(n+k) + \sum_{k=-N+1}^{-1} e^{-j2\pi \frac{k l}{N}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1+k} x(n) x(n-k)$$

wobei die innere Summe des ersten Summanden gerade $\hat{c}_N(k)$ für $0 \leq k \leq N-1$ ist. Mit $k = k' - N$ im zweiten Summanden erhält man dann

$$I_N(\frac{1}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_N(k) e^{-j2\pi \frac{k l}{N}} + \sum_{k'=-1}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{(k'-N)l}{N}} \sum_{n=0}^{N-1+k'-N} x(n) x(n-N+k') - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_N(k) e^{-j2\pi \frac{k l}{N}} + \sum_{k'=1}^{N-1} \hat{c}_N(N-k') e^{-j2\pi \frac{k' l}{N}} ,$$

bzw.

$$I_N(\frac{1}{N}) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_N^c(k) e^{-j2\pi \frac{k l}{N}} .$$

mit

$$c_N^c(k) = \begin{cases} \hat{c}_N(k) & \text{für } k=0 \\ \hat{c}_N(k) + \hat{c}_N(N-k) & \text{für } 0 < k < N \end{cases}$$

als zirkuläre Kovarianzfunktion. Diese Zusammenhänge sind im Bild 11.15 dargestellt, woraus unmittelbar deutlich wird, daß $\hat{c}_N^c(k)$ nur dann einen brauchbaren Schätzwert für die Kovarianzfolge $c_x(k)$ abgibt, wenn diese hinreichend schnell abklingt und deshalb für $|k| > N/2$ vernachlässigbar klein ist.

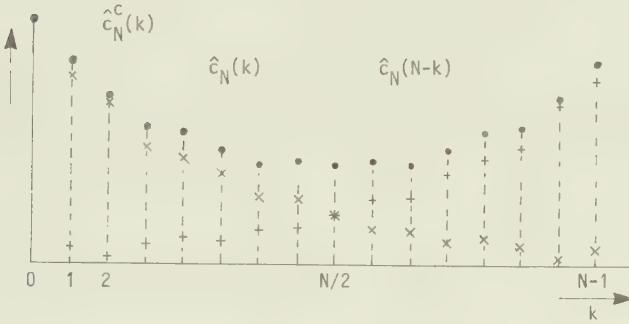


Bild 11.15

Ungeachtet dieser Zusammenhänge kann aber bei der Berechnung eines Schätzwertes $\hat{S}_{N(N)}^{(1)}$ nach der indirekten Methode gemäß Bild 11.1c problemlos mit $\hat{c}_N^c(k)$ gearbeitet werden, wenn auch die Kovarianzgewichtung $w_N(k)$ entsprechend Bild 11.16 periodisch fortgesetzt wird.

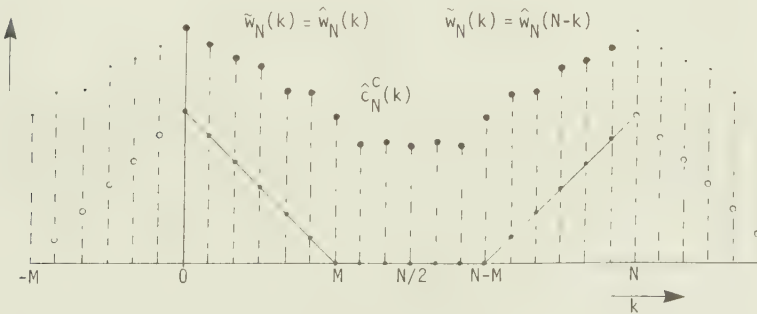


Bild 11.16

Dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}\hat{S}_N\left(\frac{1}{N}\right) &= \sum_0^{N-1} \hat{C}_N^c(k) \cdot \tilde{w}_N(k) e^{-j2\pi \frac{k}{N}} = \\ &= \sum_0^{N-1} I_N\left(\frac{m}{N}\right) \cdot w_N\left(\frac{1-m}{N}\right),\end{aligned}$$

wobei der letzte Teil dieser Beziehung eine diskrete Version von Gl.(11.13) darstellt.

Der Grund für das Auftreten der zirkularen Kovarianzfolge $\hat{C}_N^c(k)$ als FOURIER-Transformierte des diskreten Periodogramms $I_N(1/N)$ liegt natürlich in der Verletzung des Abtasttheorems: Um $\hat{C}_N^c(k)$ mit

$$\hat{C}_N^c(k) = 0 \quad \text{für } |k| \geq N$$

aus diskreten Werten der zugehörigen Spektralfunktion $I_N(\lambda)$ bestimmen zu können, dürfen diese höchstens im Abstand $\Delta\lambda = 1/(2N)$ auseinanderliegen. Demnach kann die Entstehung der zirkularen Kovarianzfolge $\hat{C}_N^c(k)$ im Bild 11.15 als Ergebnis eines Alias-Effektes im Zeitbereich auf Grund der Unterabtastung des Spektrums mit $\Delta\lambda = 1/N$ gedeutet werden.

Eine andere, in der digitalen Signalverarbeitung begründete Erklärung ist die, daß die Berechnung des diskreten Periodogramms

$$I_N\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} |X\left(\frac{1}{N}\right)|^2$$

aus $X(1/N) = \text{DFT}\{x(n)\}$, $0 \leq n < N$, einer "zirkularen Faltung" von $x(n)$ und $x(-n)$ entspricht / 29 /; dies erklärt auch den Namen "zirkulare" Kovarianzfolge.

Demgegenüber stellt

$$\hat{C}_N^c(k) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1-|k|} x(n) x(n+|k|) \quad 0 \leq k < N$$

offenbar eine lineare diskrete Faltung von $x(n)$ mit $x(-n)$ dar. Um diese Faltung mit Hilfe der DFT, d.h. als zyklische Faltung, durchführen zu können, muß $x(n)$ durch Anfügen von Nullen formal in eine Folge $x_L(n)$ der Länge $L \geq 2N-1$ ergänzt werden und dann einer DFT dieser Länge unterworfen werden.

Wählt man $L = 2N$, so erhält man mit

$$X\left(\frac{1}{2N}\right) = \sum_0^{2N-1} x_L(n) e^{-j2\pi \frac{n}{2N}} \equiv \sum_0^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{n}{2N}}$$

das diskrete Periodogramm

$$I_N\left(\frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{N} \left| X\left(\frac{1}{2N}\right) \right|^2$$

in einem Frequenzraster $\Delta\lambda = 1/(2N)$. In diesem Fall gilt

$$I_N\left(\frac{1}{2N}\right) = \sum_0^{2N-1} \tilde{c}_N(k) e^{-j2\pi \frac{k}{2N}} = \sum_{-N+1}^{N-1} \hat{c}_N(k) e^{-j2\pi \frac{k}{2N}},$$

wobei

$$\tilde{c}_N(k) = \hat{c}_N(k) \quad \text{für } |k| < N$$

$$\tilde{c}_N(k-n2N) = \tilde{c}_N(k) \quad \text{für } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

die in $2N$ periodische Fortsetzung von $\hat{c}_N(k)$ ist. Diese Zusammenhänge sind in der Darstellung 11.17 zu erkennen; der Vergleich mit Bild 11.15 macht deutlich, daß durch das Anfügen von Nullen an $x(n)$ die beiden Anteile $\hat{c}_N(k)$ und $\hat{c}_N(2N-k)$ hier im Gegensatz zur zirkularen Kovarianzfolge "auseinandergezogen" worden sind.

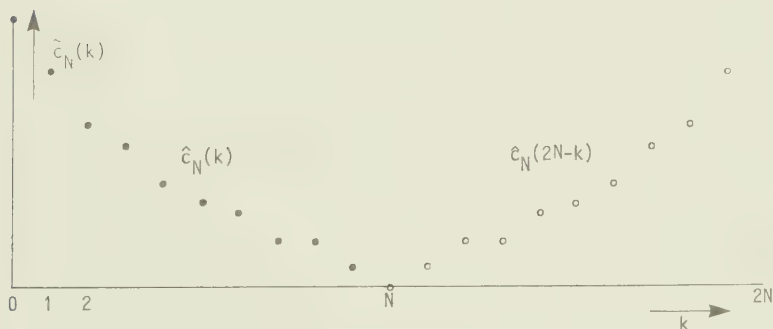


Bild 11.17

In diesem Fall ist auch das Periodogramm $I_N(\lambda)$ vollständig durch die diskreten Werte $I_N(\frac{1}{2N})$ bestimmt, vgl. Abschnitt 8.1, und es gilt die Interpolationsformel

$$I_N(\lambda) = \sum_{-N/2}^{N/2} I_N\left(\frac{1}{2N}\right) \frac{\sin\pi(2N-1)\left(\lambda - \frac{1}{2N}\right)}{\sin\pi\left(\lambda - \frac{1}{2N}\right)}.$$

Entsprechend erhält man den Schätzwert $\hat{S}_N(\lambda)$ aus diskreten Werten $S_N(\frac{1}{2N})$.

Bei der Berechnung von Spektralschätzwerten nach der indirekten Methode mit "beschnittenen" Kovarianzgewichten $w_M(k)$ werden nur $2M+1$ Werte von $\hat{c}_N(k)$ benötigt, so daß es ausreichend ist, $x(n)$ durch Anfügen von Nullen in eine Folge $x_L(n)$ der Länge $L \geq N+M$ zu ergänzen. Das Ergebnis dieser Maßnahme ist im Bild 11.18 dargestellt; für $0 \leq k \leq M$ erhält man $\hat{c}_N(k)$ und für $L-M \leq k \leq L$ entsprechend $\hat{c}_N(L-k)$; dies sind genau $2M+1$ Werte, auf die - wie in der Abbildung angedeutet - das Kovarianzfenster $w_M(k)$ gelegt werden muß. Im Bereich $M < k < L-M$ ergeben sich durch einen "Alias-Fehler" verfälschte Kovarianzen, weil die beiden Anteile $\hat{c}_N(k)$ und $\hat{c}_N(L-k)$ nur teilweise, nämlich um M Schritte, "auseinandergezogen" worden sind.

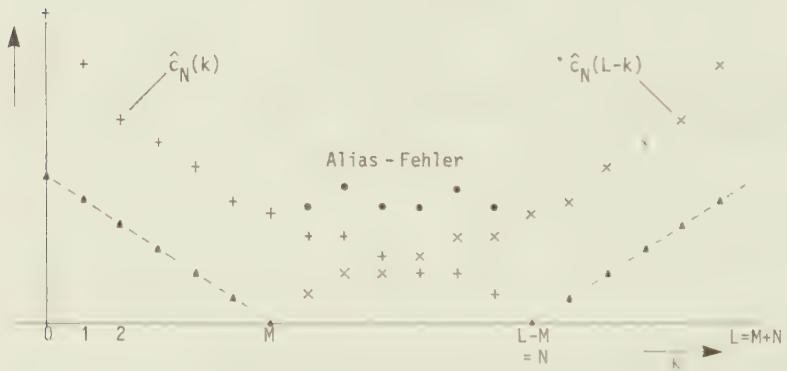


Bild 11.18

Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß die Transformationslänge L an den verwendeten Algorithmus zur Durchführung der DFT angepaßt werden muß. Viele FFT-Algorithmen basieren auf einer Transformationslänge $L = 2^P$, so daß die Signalfolge $x_N(n)$ mit sovielen Nullen ergänzt wird, bis

$$L = 2^P \geq N+M$$

ist.

11.3 WELCH-BARTLETT-Schätzwerte

Neben den im Abschnitt 11.2 dargestellten BLACKMAN-TUKEY- und Periodogramm-Schätzwerten haben die von BARTLETT /116/ und WELCH /158/ vorgeschlagenen Spektralschätzwerte auf der Grundlage modifizierter Periodogramme von gewichteten und sich überlappenden Datensegmenten große praktische Bedeutung erlangt. Dafür lassen sich verschiedene Gründe anführen:

- i) Während der Berechnung können anhand der "zeitabhängigen" Teilperiodogramme eventuell vorhandene instationäre Trends erkannt werden.
- ii) Die äquivalente Bandbreite und damit die Auflösung des Schätzwertes wird unmittelbar durch die Wahl der Segmentlänge L festgelegt.
- iii) Die Nebenmaxima des Spektralfensters, durch das der Erwartungswert der Schätzung i.w. bestimmt wird, können durch geeignete Wahl der Datengewichtung klein gehalten werden. Dies ist vor allem bei der Schätzung stark dynamischer Spektren von Bedeutung ¹⁾.
- iv) Die einzelnen zu berechnenden FOURIER-Transformationen (FFT) sind wesentlich kürzer als bei den BT-Schätzwerten. Deshalb wird weniger Speicherplatz benötigt, was besonders für die Implementierung in Mikrorechnern von Vorteil ist, und die Rundungsfehler sind geringer.

Gemäß Bild 11.1c erfolgt die Berechnung eines WB-Schätzwertes i.w. in fünf Schritten: Ausgehend von einem Datensatz der Länge N werden zunächst Segmente der Länge L gebildet und jeweils miteinander i.a. nichtkonstanten Datengewichtung $d_L(n)$ beaufschlagt, Bild 11.19. Es erscheint einsichtig, daß sich die Segmente überlappen müssen, um den mit einer nichtkonstanten Datengewichtung verbundenen Informationsverlust möglichst weitgehend aufzufangen. Auf dieses Problem wird im Punkt 11.3.4 eingegangen. Grundsätzlich muß aber

$$(K-1)L + L \leq N$$

gelten.

Aus den FOURIER-Transformierten der gewichteten Datensegmente werden die modifizierten Periodogramme

$$P_L(\lambda; \kappa) = \left| \sum_{n=0}^{K-1} x(n) d_L(n - \kappa L) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2 \quad (11.44)$$

1) Die Verwendung nichtkonstanter Datenfenster ist natürlich auch bei den Periodogramm- und BT-Schätzverfahren möglich; vgl. Punkt 11.4.2

berechnet, wobei $\kappa \geq 1$, $0 \leq \kappa < k-1$, den Beginn des $(\kappa+1)$ -ten Segments bestimmt, Bild 11.19, und die Bezeichnung "modifizierte" Periodogramme deutlich machen soll, daß hier im Gegensatz zu bisher mit nichtkonstanten Datengewichtungen gearbeitet wird. Aus den modifizierten Periodogrammen wird der Schätzwert

$$\hat{S}_N(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{\kappa=0}^{K-1} P_L(\lambda; \kappa) \quad (11.45)$$

durch lineare Mittelung gebildet. Dieser Schätzwert ist, wie in Verbindung mit Gl.(11.44) unmittelbar deutlich wird, grundsätzlich nicht negativ; vgl. Abschnitt 11.2.

Auf Grund des skizzierten Berechnungsschemas spricht man im Englischen von WOSA-Schätzwerten (weighted-overlapped-segment-averaging-estimates). Bevor auf die Schätzwerte selbst näher eingegangen wird, soll zunächst der Einfluß von nichtkonstanten Datengewichtungen auf die statistischen Eigenschaften des (modifizierten) Periodogramms untersucht werden.

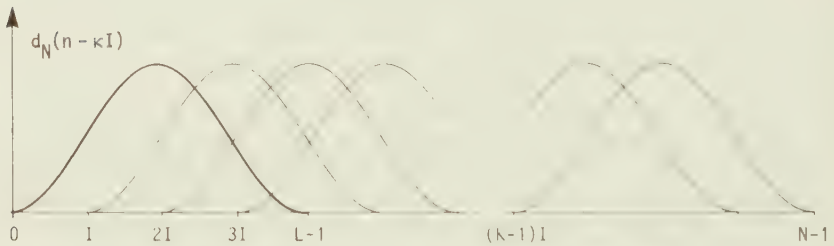


Bild 11.19

11.3.1 Der Einfluß von nichtkonstanten Datengewichtungen

Für den Sonderfall

$$d_L(n) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} & \text{für } 0 \leq n < L \\ 0 & \text{für } n < 0 \text{ und } n \geq L \end{cases} \quad (11.46)$$

stimmt $P_L(\lambda) \equiv P_L(\lambda; 0)$, Gl.(11.44), mit dem gewöhnlichen Periodogramm $I_L(\lambda)$ überein, von dem auf Grund der Untersuchungen im 9. Kapitel bekannt ist, daß es einen zwar asymptotisch erwartungstreu, aber nicht konsistenten Schätzwert für die Leistungsdichte darstellt.

Für die Prüfung, ob diese Feststellung auch für die modifizierten Periodogramme zutrifft, wird entsprechend Abschnitt 9.1 anstelle von Gl.(11.44) ein modifiziertes Periodogramm des stationären Parameterprozesses $x(n,e)$ zugrundegelegt, das sich ausführlich geschrieben in der Form

$$\begin{aligned} P_L(\lambda, e; \kappa) &= \sum_m \sum_n x(m, e) x(n, e) d_L(m - \kappa I) d_L(n - \kappa I) e^{-j2\pi\lambda(n-m)} \\ &= \sum_m \sum_n x(m + \kappa I, e) x(n + \kappa I, e) d_L(m) d_L(n) e^{-j2\pi\lambda(n-m)} \end{aligned}$$

darstellen läßt. Für ein festes λ ist $P_L(\lambda, e; \kappa)$ eine Zufallsvariable, deren Erwartungswert und Varianz hinsichtlich des Einflusses der Datengewichtung untersucht werden können.

Zunächst ergibt sich auf Grund der Stationarität des Prozesses

$$E P_L(\lambda, e; \kappa) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(v) |D_L(\lambda - v)|^2 dv = \sum c_X(k) r_{dL}(k) e^{-j2\pi\lambda k}, \quad (11.47)$$

wobei $D_L(\lambda)$ die FOURIER-Transformierte und

$$r_{dL}(k) = \sum d_L(n) d_L(n + |k|) = \int_{-1/2}^{1/2} |D_L(\lambda)|^2 e^{j2\pi\lambda k} d\lambda \quad (11.48)$$

mit $|k| < L$ die Korrelationsfolge von $d_L(n)$ sind. Bei Beachtung der Normierungsbedingung

$$\int_{-1/2}^{1/2} |D_L(\lambda)|^2 d\lambda = \sum d_L^2(n) = r_{dL}(0) = 1 \quad (11.49)$$

kann die Datengewichtung so gewählt werden, daß

$$\lim_{L \rightarrow \infty} |D_L(\lambda)|^2 = \delta(\lambda) \quad (11.50)$$

gilt¹⁾, so daß die P_L wie das "gewöhnliche" Periodogramm $I_L(\lambda, e)$ asymptotisch erwartungstreue Schätzwerte für die Leistungsdichte $S_X(\lambda)$ darstellen.

In Anlehnung an Gl.(9.22) erhält man für die Varianz

$$\begin{aligned} \text{var } P_L(\lambda, e; \kappa) &= \left[\int_{-1/2}^{1/2} S_X(u) D_L(\lambda + u) \overline{D_L(\lambda - u)} du \right]^2 + \\ &\quad + \left[\int_{-1/2}^{1/2} S_X(u) |D_L(\lambda - u)|^2 du \right]^2 \end{aligned} \quad (11.51)$$

1) Die Rechteck-Datengewichtung nach Gl.(11.46) besitzt diese Eigenschaft.

und für $|\lambda| > 1/L$ folgt daraus die asymptotische Näherung

$$\text{var } P_L(\lambda, e; \kappa) \approx S_X^2(\lambda) + a^2$$

wobei a^2 der i.a. vernachlässigbar kleine Wert des ersten Summanden in Gl.(11.51) ist; für $\lambda = 0$ gilt

$$\text{var } P_L(0, e; \lambda) \approx 2S_X^2(0).$$

Damit ist gezeigt, daß auch die modifizierten Periodogramme nach Gl.(11.44) keine konsistenten Schätzungen für die Leistungsdichte darstellen. Zur Sicherstellung der Konsistenz sind zusätzliche Maßnahmen erforderlich, wie z.B. die Mittelung über mehrere Teilperiodogramme (WB-Schätzmethode) oder aber eine zusätzliche direkte oder indirekte Glättung entsprechend der Vorgehensweise bei den BT- und Periodogramm-Schätzwerten. Auf diese Technik, die besonders für die Schätzung von Spektren mit extremer Dynamik oder in solchen Fällen von Vorteil ist, in denen keine Vorfilterung ("prewhitening") möglich ist, wird im Abschnitt 11.4 gesondert eingegangen.

11.3.2 Statistische Eigenschaften der WB-Schätzwerte

Für den Erwartungswert einer WB-Schätzung nach Gl.(11.45) gilt

$$\mathcal{E} \hat{S}_N(\lambda, e) = \frac{1}{K} \sum_{\kappa=0}^{K-1} P_L(\lambda, e; \kappa), \quad (11.52)$$

und da $\mathcal{E} P_L(\lambda, e; \kappa)$ gemäß Gl.(11.47) unabhängig von κ ist, erhält man für den Erwartungswert der Schätzung ebenfalls

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \hat{S}_N(\lambda, e) &= \int_{-1/2}^{1/2} S_X(v) |D_L(\lambda-v)|^2 dv \\ &= \sum c_X(k) r_{dL}(k) e^{-j2\pi\lambda k}. \end{aligned} \quad (11.53)$$

Daraus folgt mit den Vereinbarungen (11.49) und (11.50), daß auch die WB-Schätzwerte nur asymptotisch erwartungstreu sind und daß die Mittelung über die Teilperiodogramme keinen Einfluß auf den Erwartungswert der Schätzung hat. Vergleicht man das Ergebnis (11.53) mit dem entsprechenden für die BT-Schätzwerte, Gl.(11.16), so erkennt man, daß es hinsichtlich des Erwartungswertes offenbar gleichgültig ist, ob mit einer Kovarianzgewichtung $w_N(k)$ bzw. dem zugehörigen Spektralfenster $W_N(\lambda)$ geglättet wird oder ob "nur" mit einer geeigneten Datengewichtung d_L gearbeitet wird, wobei für große N die Zusammenhänge

$$|D_L(\lambda)|^2 \triangleq w_N(\lambda) \text{ und } r_{dL}(k) \triangleq w_N(k)$$

bestehen.

Da mit $w_N(k)$ die "quadratische" Größe $\hat{c}_N(k)$ bewertet wird, spricht man von einer "quadratischen Datengewichtung" und entsprechend wird $w_N(\lambda)$ ein "quadratisches" Spektralfenster genannt; demgegenüber bezeichnet man $d_L(n)$ als "lineare" Gewichtung und $|D_L(\lambda)|^2$ als "lineares" Spektralfenster¹⁾.

Es ist naheliegend, die äquivalente Bandbreite dieses Fensters in Anlehnung an die Gl.n. (11.29) und (11.30) als

$$\beta = \frac{\int_{-1/2}^{1/2} |D_L(\lambda)|^2 d\lambda}{\int_{-1/2}^{1/2} |D_L(\lambda)|^4 d\lambda} = \frac{1}{L k_v^*} \quad (11.54)$$

zu definieren, wobei

$$k_v^* = \int r_d^2(\tau) d\tau = \int D^4(v) dv \quad (11.55)$$

eine für jede Datengewichtung spezifische Konstante in der Größenordnung von 1 ist, siehe unten.

Darüber hinaus ist es sinnvoll und zulässig, sich ähnlich wie bei den algebraischen Kovarianzgewichten auf Datengewichtungen zu beschränken, die in der Form

$$d_L(n) = \frac{1}{\sqrt{L}} d\left(\frac{n}{L} - \frac{1}{2}\right)$$

dargestellt werden können, wobei die "erzeugende" Funktion $d(u)$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(u) &= 0 & \text{für } |u| > \frac{1}{2} \\ d(-u) &= d(u) \end{aligned}$$

besitzen soll. Definiert man außerdem die Funktionen

$$D(v) = \int d(u) e^{-j2\pi uv} du$$

und

$$r_d(\tau) = \int d(u) d(u+\tau) du = \int |D(v)|^2 e^{j2\pi\tau v} dv,$$

so gelten für große L die (asymptotisch exakten) Zusammenhänge

$$D_L(\lambda) \approx \sqrt{L} D(L\lambda) \text{ bzw. } |D_L(\lambda)|^2 \approx L D^2(L\lambda) \quad (11.56)$$

1) Diese Bezeichnungen sind nicht besonders glücklich gewählt!

$$\text{und} \quad r_{dL}(k) \approx r_d\left(\frac{k}{L}\right) \quad (11.57)$$

mit der Normierung gemäß Gl.(11.49)

$$r_{dL}(0) = \int |D_L(\lambda)|^2 d\lambda = \int D^2(v) dv = 1.$$

Auf diese Zusammenhänge wird im folgenden wiederholt zurückgegriffen.

In Analogie zur Abschätzung des Verschiebungsfehlers für die BT-Schätzwerte im Punkt 11.2.2 erhält man unter der Voraussetzung, daß $S_X(\lambda)$ eine stetige 2. Ableitung besitzt und sich diese im Durchlaßbereich von $|D_L(\lambda)|^2$ nur wenig ändert, für die Verschiebung

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) \approx S_X''(\lambda) \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} v^2 |D_L(v)|^2 dv \approx S_X''(\lambda) \frac{1}{2L^2} \int v^2 D^2(v) dv.$$

Dieses Ergebnis läßt sich mit der Abkürzung

$$k_b^* = \frac{1}{2} \int v^2 D^2(v) dv = -\frac{1}{8\pi^2} r_d''(0)$$

in der Form

$$b\hat{S}_N(\lambda, 1) \approx \frac{k_b^*}{L^2} S_X''(\lambda) \quad (11.58)$$

darstellen, die formal mit der entsprechenden Näherung (11.19) für die BT-Schätzwerte übereinstimmt, wobei k_b^* wiederum eine für jede Datengewichtung spezifische Konstante ist. Im Punkt 11.3.3 werden die Konstanten k_b^* und k_v^* für einige gebräuchliche Datengewichtungen angegeben.

Für die Varianz der WB-Schätzung nach Gl.(11.45) erhält man in Verbindung mit Gl.(11.51) zunächst

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) &= \frac{1}{K^2} \sum_{\mu=0}^{K-1} \sum_{\nu=0}^{K-1} \varepsilon P_{\mu} P_{\nu} - \left[\sum_{\mu=0}^{K-1} \varepsilon P_{\mu} \right]^2 \\ &= \frac{1}{K^2} \sum_{\mu=0}^{K-1} \sum_{\nu=0}^{K-1} \text{cov}\{P_{\mu}, P_{\nu}\}, \end{aligned}$$

wobei die Abkürzung

$$P_K \equiv P_L(\lambda, e; K) = \left| \sum x(n, e) d_L(n - \kappa I) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2$$

verwendet worden ist. Die Berechnung der Kovarianz zwischen den modifizierten Periodogrammen verschiedener Segmente kann entsprechend der Vorgehensweise im Punkt 9.3.4 durchgeführt werden. Setzt man dazu wiederum normalverteilte Prozesse $x(n, e)$ voraus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{cov}\{P_\mu, P_\nu\} = & \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) D_L(\zeta+\lambda) \overline{D_L(\zeta-\lambda)} e^{j2\pi\zeta(\nu-\mu)I} d\zeta \right|^2 + \\ & + \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) |D_L(\zeta-\lambda)|^2 e^{j2\pi\zeta(\nu-\mu)I} d\zeta \right|^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\text{cov}\{P_\mu, P_\nu\} \approx \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) |D_L(\zeta-\lambda)|^2 e^{j2\pi\zeta(\nu-\mu)I} d\zeta \right|^2,$$

weil für $\lambda \neq 0, \pm 1/2$ und große L der erste Summand vernachlässigt werden kann.¹⁾ Daraus folgt mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^2} \sum_{\mu=0}^{K-1} \sum_{\nu=0}^{K-1} e^{j2\pi(\zeta-\xi)(\nu-\mu)I} &= \frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) e^{-j2\pi(\zeta-\xi)K I} \\ &= \left[\frac{\sin \pi K I (\zeta-\xi)}{K \sin \pi I (\zeta-\xi)} \right]^2 \end{aligned}$$

für die Varianz des WB-Schätzwertes

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) S_X(\xi) \left[\frac{\sin \pi K I (\zeta-\xi)}{K \sin \pi I (\zeta-\xi)} \right]^2 |D_L(\zeta-\lambda)|^2 |D_L(\xi-\lambda)|^2 d\zeta d\xi$$

oder

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) = \frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) e^{j2\pi\zeta K I} |D_L(\zeta-\lambda)|^2 d\zeta \right|^2.$$

Um eine für praktische Anwendungen brauchbare Näherung zu erhalten, soll zusätzlich angenommen werden, daß sich $S_X(\lambda)$ im Durchlaßbereich des Spektralfensters $|D_L(\lambda)|^2$ nur wenig ändert. Dann ergibt sich

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{S_X^2(\lambda)}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) \left| \int_{-1/2}^{1/2} |D_L(v)|^2 e^{j2\pi v K I} dv \right|^2$$

oder in Verbindung mit Gl.(11.48)

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{S_X^2(\lambda)}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) r_{dL}^2(K I); \quad (11.59)$$

1) Strenggenommen muß gefordert werden, daß sich die beteiligten Frequenzfenster nicht überlappen, vgl. S. 153.

für $\lambda = 0$ und $\lambda = \pm 1/2$ müssen die Ergebnisse jeweils mit dem Faktor 2 multipliziert werden, vgl. die Anmerkungen auf S. 153.

Damit die Varianz gemäß Gl.(11.59) möglichst klein wird, müßte sowohl die Anzahl K der Segmente als auch der Parameter I , vgl. Bild 11.19, möglichst groß gewählt werden (für große Werte von I ist die Korrelationsfunktion $r_{dL}(\kappa I)$ klein!). Dies ist jedoch wegen der Einschränkung von Gl.(11.43) nicht möglich, vielmehr gilt

$$I = \frac{N-L}{K-1}, \quad (K \geq 2) \quad (11.60)$$

wobei zunächst angenommen wird, daß bei der Zerlegung des Datensatzes kein Restsegment der Länge $L' < L$ auftritt, d.h. in der Beziehung (11.43) das Gleichheitszeichen gilt. Der Einfluß von Restsegmenten auf die Varianz wird im Punkt 11.3.5 untersucht.

Mit der Beziehung (11.60) ergibt sich dann für die Varianz

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{S'_X(\lambda)}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|\kappa|}{K}\right) r_d^2\left(\kappa \frac{N-L}{K-1}\right)$$

bzw. in Verbindung mit Gl.(11.57)

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{S'_X(\lambda)}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|\kappa|}{K}\right) r_d^2\left(\kappa \frac{N-L}{K-1}\right). \quad (11.61)$$

Aus diesem Ergebnis wird deutlich, daß für $K \leq \frac{N}{L}$, d.h. keine Überlappung der Segmente, die Varianz mit $1/K$ abnimmt, weil $r_d(\tau) \equiv 0$ für $|\tau| > 1$ ist. Wenn $K > \frac{N}{L}$ wird, ist zu erwarten, daß die Varianz zunächst noch weiter abnimmt, allerdings mit einer kleineren Rate, weil die überlappenden Segmente zunehmend statistisch abhängig voneinander sind. Von besonderem Interesse in diesem Zusammenhang ist, ob die Abnahme mit wachsendem K monoton erfolgt oder ob es einen Wert $K = K^*$ gibt, für den die Varianz der Schätzung minimal wird. Diese Frage wird im Punkt 11.3.4 aufgegriffen; zunächst soll jedoch nachgewiesen werden, daß die WB-Schätzung konsistent ist. Läßt man dazu N und L in geeigneter Weise gegen unendlich gehen, so daß auch $\frac{N}{L} \rightarrow \infty$ und $K \rightarrow \infty$, so kann die Summe in Gl.(11.61) als Integral

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) &\approx S'_X(\lambda) \int_{-1}^1 \left(1 - |u|\right) r_d^2\left(u \frac{N}{L}\right) du \\ &\approx S'_X(\lambda) \frac{L}{N} \int_0^1 r_d^2(t) dt \end{aligned} \quad (11.62)$$

geschrieben werden, und mit Gl.(11.55) folgt daraus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \lim_{N \rightarrow \infty} S_x^2(\lambda) \frac{1}{N} k_V^* = 0.$$

Damit ist auf Grund der bereits nachgewiesenen asymptotischen Erwartungstreue von $\hat{S}_N(\lambda, e)$ gezeigt, daß die WB-Schätzung konsistent ist.

Schreibt man Gl.(11.62) in Verbindung mit den Gln.(11.54) und (11.55) in der Form

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \frac{1}{8N} S_x^2(\lambda),$$

so wird darüber hinaus durch Vergleich mit dem entsprechenden Ergebnis für einen BT-Schätzwert, Gl.(11.31), deutlich, daß für große Datenlängen N die beiden Schätzverfahren i.w. mit den gleichen statistischen Fehlern behaftet sind.

11.3.3 Kenngrößen von gebräuchlichen Datengewichtungen

Um die Frage beantworten zu können, ob die Varianz der Schätzung für eine bestimmte Anzahl von Segmenten K ein Minimum annimmt, muß die Korrelationsfunktion $r_d(\tau)$ für eine zugrundeliegende Datengewichtung bekannt sein. Diese Funktion wird außerdem benötigt, um die Konstanten

$$k_b^* = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 D^2(v) dv = -\frac{1}{8\pi^2} r_d''(0)$$

und

$$k_V^* = \int_{-\infty}^{\infty} D^4(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} r_d^2(\tau) d\tau$$

als Maße für den Verschiebungsfehler bzw. für die äquivalente Bandbreite β und damit für die Auflösung eines Schätzwertes berechnen zu können.

Als Datengewichtungen können bei geeigneter Normierung gemäß Gl.(11.49), abgesehen von dem DANIELL-Fenster, alle im Punkt 11.2.6 vorgestellten Kovarianzgewichtungen verwendet werden, wenn bei dem Übergang $w(u) \rightarrow d(u)$ beachtet wird, daß die erzeugende Funktion $d(u)$ nur im Intervall $|u| < \frac{1}{2}$ ungleich Null ist und daß als Spektralfenster nicht $D_L(\lambda)$ sondern $|D_L(\lambda)|^2$ wirksam ist. Dies hat zur Folge, daß die in der Tabelle 11.1 angegebenen κ -Werte um den Faktor 2 größer sind und der Abfall der Nebenmaxima mit

$\alpha^* = \alpha^2$ erfolgt. Diese Zusammenhänge werden anhand der dargestellten Datengewichtungen unmittelbar deutlich.

1) Die Dreiecks-Datengewichtung

Ausgehend von der erzeugenden Funktion

$$d(u) = \begin{cases} \sqrt{3} (1 - 2|u|) & \text{für } |u| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |u| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

erhält man die Korrelationsfunktion

$$r_d(\tau) = \begin{cases} 1 - 6\tau^2 + 6|\tau|^3 & \text{für } |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |\tau|)^3 & \text{für } \frac{1}{2} \leq |\tau| \leq 1, \end{cases}$$

die auf Grund ihrer Entstehung identisch ist mit $w(u)$ der PARZEN-Kovarianzgewichtung, s. Tabelle 11.1 und Bild 11.6. Daraus folgt unmittelbar

$$\kappa^* = -26,9 \text{ dB} \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{1}{\lambda^4}$$

sowie

$$k_b^* = 0,152, \quad k_v^* = 0,54 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1,85}{L}$$

Das Spektralfenster $|D_L(\lambda)|^2$ entspricht dem PARZEN-Fenster in Tabelle 11.2 und Bild 11.9.

2) Die "kubische"-Datengewichtung

Die "kubische" Datengewichtung entspricht der PARZEN-Kovarianzgewichtung und wird wegen der eingeschränkten Ausdehnung und der Normierungsbedingung (11.49) durch

$$d(u) = \begin{cases} 8 \sqrt{\frac{70}{1193}} (1 - 24u^2 + 48|u|^3) & \text{für } |u| \leq \frac{1}{4} \\ 16 \sqrt{\frac{70}{1193}} (1 - 2|u|)^3 & \text{für } \frac{1}{4} \leq |u| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } |u| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

bzw.

$$r_d(\tau) = \begin{cases} \frac{1024}{151} (1 - |\tau|)^7 = r_1(\tau) & \text{für } \frac{3}{4} \leq |\tau| \leq 1 \\ r_1(\tau) - \frac{8192}{151} \left(\frac{3}{4} - |\tau|\right)^7 = r_2(\tau) & \text{für } \frac{1}{2} \leq |\tau| \leq \frac{3}{4} \\ r_2(\tau) + \frac{28672}{151} \left(\frac{1}{2} - |\tau|\right)^7 = r_3(\tau) & \text{für } \frac{1}{4} \leq |\tau| \leq \frac{1}{2} \\ r_3(\tau) - \frac{57344}{151} \left(\frac{1}{4} - |\tau|\right)^7 & \text{für } |\tau| \leq \frac{1}{4} \\ 0 & |\tau| \geq 1 \end{cases}$$

gekennzeichnet; beide Funktionen sind im Bild 11.20 dargestellt. Daraus ergeben sich die Konstanten

$$k_b^* = 0,282 \quad \text{und} \quad k_v^* = 0,372,$$

und für die äquivalente Bandbreite folgt

$$\beta = \frac{2,686}{L}.$$

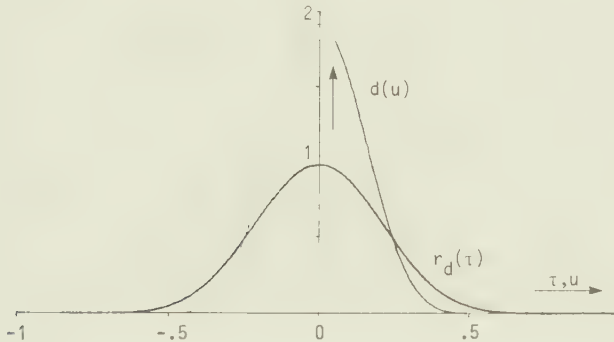


Bild 11.20

Der Vergleich mit der Dreiecks-Datengewichtung macht deutlich, daß die Verringerung der Varianz auf Grund des kleineren k_v^* -Wertes erkauft wird durch eine Verschlechterung der Auflösung (β ist größer geworden) und damit verbunden auch durch einen größeren Verschiebungsfehler. Das Produkt

$$k_b^* \cdot k_v^{*2} = 0,039$$

als Maß für den Verschiebungsfehler bei gleicher Varianz - vgl. die Anmerkungen zu Tabelle 11.3 auf S. 172 - ist jedoch kleiner als bei der Dreiecksgewichtung (0,044). Ein weiterer Vorteil der "kubischen" Gewichtung ist darin zu sehen, daß die Struktur von $r_d(\tau)$ für die numerische Berechnung der Varianz nach Gl.(11.61) besonders vorteilhaft ist.

Für die Spektralfunktionen erhält man

$$D(v) = 3 \cdot \sqrt{\frac{70}{1193}} \left[\frac{\sin \pi \frac{v}{4}}{\pi \frac{v}{4}} \right]^4$$

und

$$|D_L(\lambda)|^2 = \frac{630L}{1193} \left[\frac{\sin \pi L \frac{\lambda}{4}}{L \sin \pi \frac{\lambda}{4}} \right]^6;$$

die logarithmische Darstellung dieser Funktion entspricht i.w. dem Bild 11.9 mit doppeltem Maßstab auf der Ordinate und $M = L/2$. Als Kenngrößen für das Verhalten der Nebenmaxima sind deshalb

$$\kappa^* = -53,8 \text{ dB} \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{1}{\lambda^8}$$

anzugeben, vgl. Tabelle 11.1.

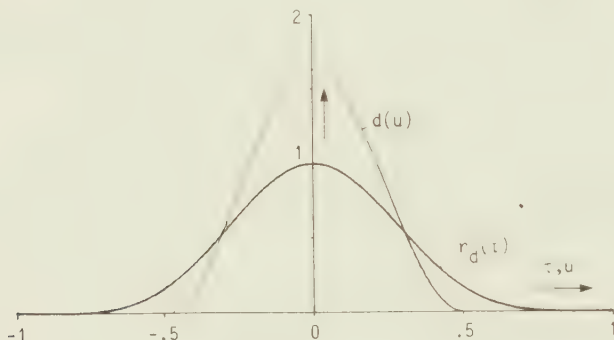


Bild 11.21

3) Die cos-Datengewichtung

Eine auf Grund ihrer rechentechnischen Vorteile (vgl. die Anmerkungen zur HANN-Kovarianzgewichtung auf S. 1/2) sehr häufig verwendete Datengewichtung ist die im Bild 11.21 dargestellte cos-Gewichtung mit

$$d(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{3}} \cos^2 \pi u = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + \cos 2\pi u) & \text{für } |u| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$r_d(u) = \begin{cases} \frac{2}{3} (1 - |u|) (1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi u) + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi |u|, & |u| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zugehörigen Spektralfunktionen sind

$$D(v) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sin \pi v}{\pi v} \cdot \frac{1}{1 - v^2}$$

bzw.

$$|D_L(\lambda)|^2 = \frac{2L}{3} \left[\frac{\sin \pi L \lambda}{\pi L \lambda} \frac{1}{1 - L^2 \lambda^2} \right]^2$$

mit

$$\kappa^* = -31,5 \text{ dB} \quad \text{und} \quad \alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bezüglich der Ähnlichkeit der logarithmischen Darstellung mit Bild 11.10 gilt das oben Gesagte entsprechend. Die wesentlichen Kenngrößen ergeben sich zu

$$k_b^* = \frac{1}{6} \approx 0,167, \quad k_v^* = 0,481 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2,08}{L}.$$

Mit dieser Datengewichtung wird offenbar eine größere Varianz zu Gunsten einer besseren Auflösung und eines kleineren Verschiebungsfehlers erreicht. Die für einen echten Vergleich relevante Größe

$$k_b^* \cdot k_v^{*2} = 0,0358$$

weicht jedoch nur unerheblich von dem entsprechenden Wert der "kubischen" Gewichtung ab. Es zeigt sich hier angesichts der günstigeren Eigenschaften bezüglich der Nebenmaxima noch deutlicher als bei den Kovarianzgewichten, daß die Wahl einer bestimmten Datengewichtung im Grunde nicht kritisch ist; in allen Fällen muß ein Kompromiß zwischen statistischer Genauigkeit (Varianz) und Auflösung der Schätzung eingegangen werden. Der Verschiebungsfehler spielt dabei wegen der i.a. fehlenden Information über die 2. Ableitung des Dichtespektrums nur eine untergeordnete Rolle.

Vor diesem Hintergrund soll darauf verzichtet werden, weitere Datengewichtungen und ihre Kenngrößen im einzelnen darzustellen; vielmehr sei auf eine sehr umfangreiche Übersicht von HARRIS /168/ hingewiesen.

11.3.4 Bestimmung des optimalen Überlappungsgrades der Segmente

Für die nachfolgenden Betrachtungen wird weiterhin davon ausgegangen, daß bei der Zerlegung eines Datensatzes der Länge N genau K Segmente der Länge L entstehen, d.h. es gilt weiterhin der Zusammenhang (11.60)

$$I = \frac{N-L}{K-1}, \quad (K \geq 2).$$

Diese Annahme ist zulässig, weil sich zeigen wird, daß nicht N selbst, sondern das Produkt BN in den Untersuchungen die entscheidende Rolle spielt. Die Berücksichtigung eines Restsegmentes der Länge $L' < L$ wird erst erforderlich, wenn ein gegebener Datensatz der Länge N bei geforderter Auflösung β segmentiert werden muß. Auf dieses Problem wird im nächsten Punkt eingegangen.

Anstelle der vergleichsweise unanschaulichen Segmentverschiebung I wird im folgenden mit dem Überlappingsgrad

$$q = \frac{L-I}{L} \quad , \quad 0 \leq q < 1 \quad (11.63)$$

gearbeitet, der mit dem Faktor 100 multipliziert angibt, um wieviel Prozent sich zwei aufeinanderfolgende Segmente überlappen, vgl. Bild 11.19. In Verbindung mit den Gln.(11.60) und (11.54) gelten dann die Zusammenhänge

$$q = \frac{K - \frac{N}{L}}{K - 1} = \frac{K - BN \cdot k_v^*}{K - 1} \quad (11.64)$$

Um die schon früher aufgekommene Frage zu beantworten, ob die Varianz für einen bestimmten Wert K^* bzw. nach Gl.(11.64) für einen bestimmten Überlappingsgrad q^* ein Minimum annimmt, wird Gl.(11.61) in der Form

$$\eta^2 = \frac{\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e)}{S_x^2(\lambda)} \approx \frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) r_d^2 \left(\kappa \frac{BN \cdot k_v^* - 1}{K - 1}\right) \quad (11.65)$$

geschrieben und numerisch ausgewertet. In der Tabelle 11.4 und im Bild 11.22 ist das Ergebnis für den Fall der cos-Datengewichtung und einem Zeit-Bandbreite-Produkt $BN = BT = 10$ dargestellt. Als wichtigste Aussage ist festzuhalten, daß es tatsächlich einen endlichen Wert für K gibt, nämlich $K^* = 12$, für den die auf $S_x^2(\lambda)$ bezogene Varianz der Schätzung minimal wird; der zugehörige "optimale" Überlappingsgrad ist $q^* = 65,3\%$.

Darüber hinaus ist zu erkennen, daß der Abfall der Varianz mit $1/K$ nicht nur für $K < BN \cdot k_v^* = 4,81$ erfolgt, d.h. solange keine Überlappung der Segmente auftritt, sondern auch darüber hinaus bis etwa $K = 8$ bei $q = 45,6\%$.

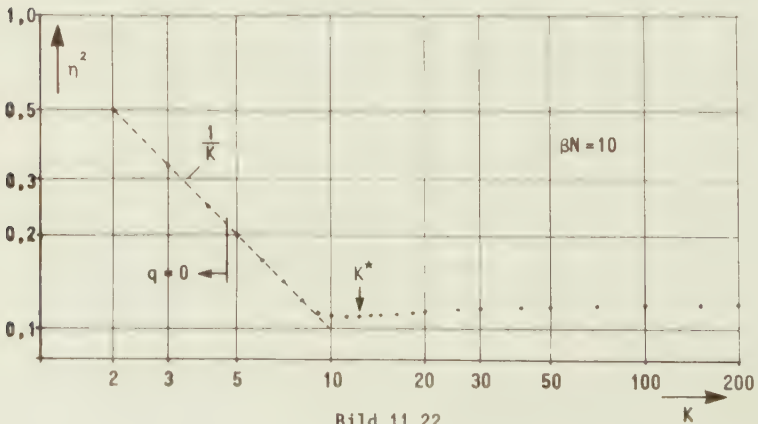


Bild 11.22

K	η^2	q/%
2	.5	0
3	.3333	0
4	.25	0
5	.2	4.8
6	.1667	23.8
7	.1433	36.5
8	.1278	45.6
9	.119	52.4
10	.1149	57.7
11	.1135	61.9
12	.1133	65.4 *
13	.1136	68.3
14	.114	70.7
15	.1144	72.8
16	.1147	74.6
18	.1153	77.6
20	.1159	79.9
25	.1168	84.1
30	.1176	86.9
40	.1185	90.2
50	.119	92.2
70	.1196	94.5
100	.1201	96.2
150	.1205	97.4
200	.1207	98.1

Tabelle 11.4

Erst wenn K und damit der Überlappungsgrad weiter ansteigen, wird die Abnahme der Varianz kleiner, bis sie bei K^* das Minimum erreicht; für $K > K^*$ nimmt sie dann wieder geringfügig zu.

Ein weiterer interessanter Aspekt ist, daß die Varianz für $K = 10$ ($q = 57,7\%$) nur 1,4% über dem Minimum liegt, so daß eine Erhöhung auf $K^* = 12$ und die damit verbundene Steigerung des Rechenaufwandes um 20% praktisch nicht lohnt. Die Einsparung an Rechenzeit durch die Verwendung von nicht-optimalen Überlappungsgraden $q < q^*$ ist für große BN-Werte noch ausgeprägter.

Dagegen ist die Varianz für $K = 4$, dem größten Wert mit $q = 0$, mehr als doppelt so groß wie das Minimum, wodurch die Notwendigkeit für das Arbeiten mit überlappenden Segmenten offensichtlich wird.

Führt man die Auswertung von Gl.(11.65) für verschiedene BN-Werte durch, so erhält man das in Bild 11.23 dargestellte Ergebnis. Hierbei sind der optimale Überlappungsgrad q^* und das Minimum von η^2 über BN aufgetragen. Durch lineare Regression erhält man die Näherung

$$\eta^2 \approx \frac{1}{BN - 1,19} \quad , \quad (11.66)$$

und für $\beta N > 30$ kann praktisch mit der von den BT-Schätzwerten bekannten Beziehung $\eta^2 \approx 1/\beta N$ gearbeitet werden.

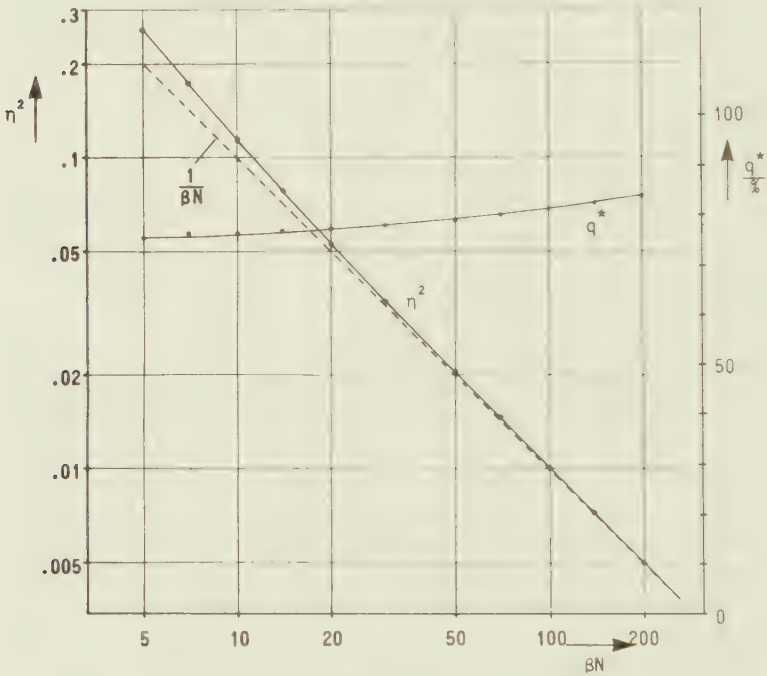


Bild 11.23

Diese Zusammenhänge bilden die Grundlage für den Entwurf einer WB-Spektralanalyse, wie er im Punkt 11.3.6 beschrieben wird.

Wertet man in entsprechender Weise die Gl.(11.65) für die zwei anderen vorgestellten Datengewichtungen aus, Tabelle 11.5, so kommt man zu der interessanten Feststellung, daß die Zahl der Segmente K_2 bzw. K_5 , die benötigt werden, damit die Varianz nicht mehr als 2% (5%) über dem Minimalwert liegt, für alle Datengewichtungen nahezu gleich ist. D.h. mit anderen Worten, daß für die Durchführung einer WB-Schätzung bei vorgegebener Varianz und Auflösung, d.h. für ein bestimmtes βN , unabhängig von der verwendeten Datengewichtung dieselbe Anzahl von FOURIER-Transformationen benötigt wird.

	$\beta N = 10$			$\beta N = 20$			$\beta N = 50$			$\beta N = 100$			$\beta N = 200$		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
K^*	12	12	11	26	27	27	108	74	75	227	158	159	468	352	333
K_2	10	10	10	22	22	21	56	57	57	115	114	116	232	231	234
K_5	10	9	9	20	20	20	51	51	51	104	104	105	210	209	211

1: Dreiecks-, 2: cos-, 3: "kubische" Gewichtung

Tabelle 11.5

Der Grund für dieses Phänomen ist darin zu sehen, daß für eine bestimmte Bandbreite $\beta = 1/(L \cdot k_V^*)$ die Spektralfenster mit "besserem" Verhalten bezüglich der Nebenmaxima eine größere Segmentlänge L benötigen (k_V^* ist kleiner), aber gleichzeitig die zugehörigen Datengewichtungen in der Mitte der Segmente stärker konzentriert sind; vgl. die Bilder 11.20 und 11.21. Deshalb muß bei diesen Gewichtungen der Überlappungsgrad q größer sein, damit ein vorliegender Datensatz hinsichtlich der Varianz der Schätzung möglichst gut ausgenutzt wird. Das Anwachsen von L und die gleichzeitige Erhöhung von q kompensieren sich offenbar gegenseitig so, daß unabhängig vom Typ der Datengewichtung stets die gleiche Anzahl von Segmenten benötigt wird, um eine geforderte statistische Genauigkeit zu erreichen.

11.3.5 Der Einfluß von Restsegmenten auf die Varianz

In vielen Anwendungsfällen stellt sich das Problem einer Spektralschätzung so, daß ein Datensatz der Länge N gegeben ist und ein Schätzwert $\hat{S}_N$ mit geforderter Auflösung β und möglichst kleiner Varianz gesucht wird.

Wenn man sich für eine bestimmte Datengewichtung entschieden hat, so liegt damit nach Gl.(11.54) die Segmentlänge

$$L = \frac{1}{k_V^* \cdot \beta}$$

fest, und aus einer Tabelle oder einem Diagramm entsprechend Bild 11.23 kann für den gegebenen βN -Wert der optimale Überlappungsgrad q^* entnommen werden. Daraus erhält man mit Gl.(11.64) die Zahl der Segmente

$$K \leq \frac{\frac{N}{L} - q^*}{1 - q^*} \equiv K^* \quad (11.67)$$

wobei unmittelbar einsichtig ist, daß i.a. $K < K^*$ sein wird, weil bei der Datenzerlegung ein Restsegment der Länge $L' < L$ entsteht, Bild 11.24. Die Behandlung dieses Restsegmentes kann auf verschiedene Weise erfolgen:

- Nichtberücksichtigen, d.h. Verzicht auf einen Teil der Daten.
- Verkleinerung oder Erhöhung des Überlappungsgrades bzw.
- Vergrößerung der Segmentlänge auf $L_c > L$, so daß in der Beziehung (11.66) das Gleichheitszeichen gilt, oder
- Einbeziehen des Restsegmentes in den Schätzwert.

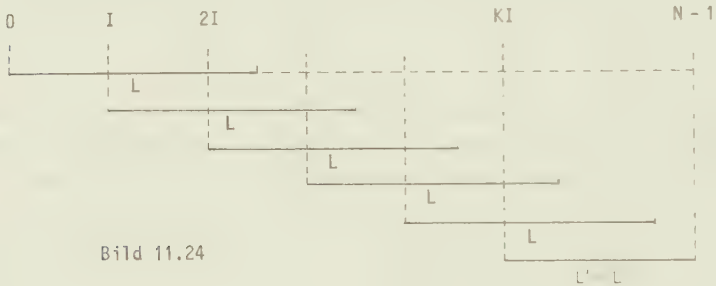


Bild 11.24

Die folgenden Ausführungen werden zeigen, daß die ersten drei Maßnahmen, insbesondere jedoch a) nur für große BN -Produkte, d.h. $L \ll N$ brauchbar sind und daß die Berücksichtigung des Restsegmentes speziell bei kurzen Datensätzen auf kleinere Varianzen führt, als es auf Grund der Überlegungen im voranstehenden Punkt zu erwarten ist.

Ausgehend von der Segmentierung nach Bild 11.24 ergeben sich $K+1$ -Folgen der Länge

$$L_k = \begin{cases} L & \text{für } k = 0, 1, \dots, K-1 \\ L' = N - KI & k = K, \end{cases}$$

wobei

$$K = \left\lfloor \frac{N-L}{L} \right\rfloor + 1$$

ist und $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl beschreibt, die noch kleiner als z ist. Aus diesen Folgen werden gemäß Gl.(11.44) die modifizierten Periodogramme

$$P(\lambda; \kappa) = \left| \sum x(n) d_{\kappa}(n - \kappa I) e^{-j2\pi\lambda n} \right|^2$$

berechnet, wobei zu beachten ist, daß alle Datengewichtungen, also auch die des Restsegmentes, die Normierungsbedingungen

$$\sum_{n=0}^{L_K-1} d_K^2(n) = 1$$

erfüllen. Der Schätzwert für die Leistungsdichte wird schließlich durch die gewichtete Summation

$$\hat{S}_N(\lambda) = \sum_{\kappa=0}^K A_{\kappa} P(\lambda; \kappa) \quad (11.68)$$

mit

$$A_{\kappa} = \begin{cases} \frac{L}{KL + L'} & \text{für } \kappa = 0, 1, \dots, K-1 \\ \frac{L'}{KL + L'} & \text{für } \kappa = K \end{cases}$$

gebildet.

Diese Wahl der Gewichtungen ist abgesehen davon, daß im Hinblick auf die (asymptotische) Erwartungstreue die Bedingung

$$\sum_{\kappa=0}^K A_{\kappa} = 1$$

erfüllt ist, mehr oder weniger willkürlich. Man kann jedoch zeigen, daß eine Optimierung der A_{κ} mit dem Ziel einer minimalen Varianz nur für den weniger bedeutenden Fall kleiner BN-Werte eine signifikante Verbesserung mit sich bringt /154/.

Für die Varianz des Schätzwertes nach Gl.(11.68) erhält man aufgrund einer entsprechenden Vorgehensweise wie im Punkt 11.3.2

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx & \frac{L^2}{(KL + L')^2} \sum_{\kappa=0}^K (K - |\kappa|) r_L^2(\kappa I) + \\ & + \frac{2LL'}{(KL + L')^2} \sum_{\kappa=1}^K r_{LL'}^2(\kappa I) + \left(\frac{L'}{KL + L'} \right)^2. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Dabei sind die beteiligten Korrelationsfunktionen in Analogie zu Gl.(11.48) für $0 \leq \kappa \leq K-1$ definiert als

$$r_L(k) = \sum_n d_K(n) d_K(n + |k|)$$

und

$$r_{LL'}(k) = \sum_n d_K(n) d_K(n + |k|)$$

Hierzu sei angemerkt, daß eigentlich auch im dritten Summanden von Gl. (11.69) eine Korrelationsfunktion enthalten ist, nämlich

$$r_L(0) = \sum_k d_k^2(n) = 1.$$

Für $L' = 0$, d.h. wenn kein Restsegment vorhanden ist, geht Gl.(11.69) über in das aus Punkt 11.3.2 bekannte Ergebnis (11.59).

Die numerische Auswertung von Gl.(11.69) führt im Falle einer cos-Daten-gewichtung und $N = 512$ sowie $L = 128$ auf das im Bild 11.25 dargestellte Ergebnis, wobei die untere Kurve den Verlauf η_1^2 der auf $S_x^2(\lambda)$ bezogenen Varianz bei Berücksichtigung des Restsegmentes zeigt; die oben liegende Kurve η_2^2 ergibt sich, wenn das Restsegment unberücksichtigt bleibt. Selbstverständlich ist immer $\eta_1^2 \leq \eta_2^2$, andernfalls wäre die Form der Einbeziehung des Restsegmentes in die Schätzfunktion unzweckmäßig erfolgt; im Bereich des optimalen Überlappungsgrades beträgt der Unterschied mehr als 6%.

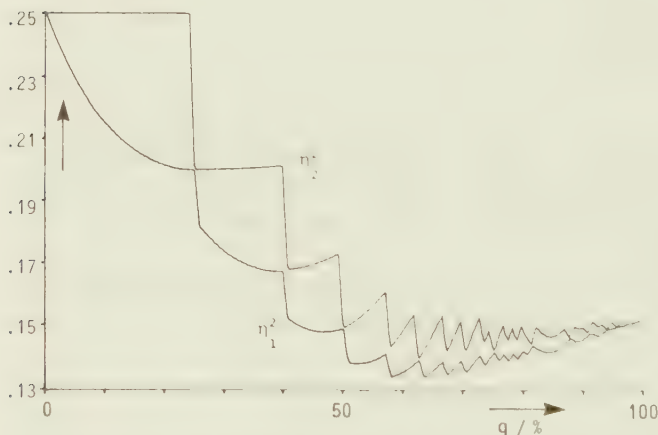


Bild 11.25

Auffällig sind die Sprünge in den beiden Kurvenverläufen. Wie man aus der Tabelle 11.6, in der ein Ausschnitt der Ergebnisse aufgelistet ist, entnehmen kann, treten die Sprünge an den Stellen auf, an denen sich die Zahl K der Segmente ändert. Außerdem sind sie bei Vernachlässigung des Restsegmentes größer als im Falle seiner Einbeziehung.

Führt man die gleiche Untersuchung für andere BN-Werte durch (im dargestellten Beispiel ist $BN = 8,3$), so stellt man fest, daß für größere Werte der Verlauf der Kurven zunehmend glatter wird, während für kleine BN die Sprünge auch im Verlauf von η_1^2 sehr viel stärker ausgebildet sind. So ergibt sich z.B. für $BN = 4,16$ aus der Erhöhung von $I^* = 63$ um 1 eine Vergrößerung der Varianz um 20% /157/.

I	q/%	η_1^2	η_2^2	K	L'
42	67.2	.1347	.1421	10	92
43	66.4	.1395	.1541	9	125
44	65.6	.1379	.1509	9	116
45	64.8	.1365	.1479	9	107
46	64.1	.1352 *	.1451	9	98
47	63.3	.134	.1424	9	89
48	62.5	.14	.14	9	0
49	61.7	.1385	.1543	8	120
50	60.9	.1373	.1519	8	112
51	60.2	.1362	.1495	8	104
52	59.4	.1354	.1474	8	96
53	58.6	.1347	.1453	8	88
54	57.8	.1341 +	.1435	8	80
55	57	.1418	.1616	7	127
56	56.3	.1408	.1598	7	120
57	55.5	.14	.1581	7	113
58	54.7	.1393	.1565	7	106
59	53.9	.1388	.1551	7	99
60	53.1	.1385	.1538	7	92
61	52.3	.1384	.1526	7	85

Tabelle 11.6

Abschließend soll noch auf zwei Punkte hingewiesen werden, die man bei einer etwas genaueren Betrachtung der Ergebnisse für η_{1*}^2 aus der Tabelle 11.6 gewinnen kann. Zum einen ist es sinnvoll, nicht mit $q^* = 63,3\%$ ($I = 47$) zu arbeiten sondern mit $q = 57,8\%$ bzw. $I = 54$, weil bei praktisch gleicher Varianz der Rechenaufwand um 10% geringer ist (anstelle von $K^* + 1 = 10$ brauchen nur 9 Teilperiodogramme berechnet zu werden). Gibt man sich mit einer

Varianz zufrieden, die 3,3% über dem Minimum liegt ($I = 61$, $q = 52,3\%$), so verringert sich der Rechenaufwand sogar um 20%. Diese Feststellungen decken sich weitgehend mit denen aus Punkt 11.3.4. Darüber hinaus fällt auf, daß der Minimalwert $\eta_1^2 = 0,134$ kleiner ist als es auf Grund der Untersuchungen im voranstehenden Punkt eigentlich zu erwarten ist. Mit $BN = 8,316$ erhält man nämlich sowohl aus Bild 11.23 als auch auf Grund der Näherung (11.66) als optimale Varianz $\eta^2 = 0,14$.

Ein Blick in die Tabelle 11.6 zeigt, daß dies genau der kleinste Wert von $\eta_1^2 = \eta_2^2$ ist, bei dem $L' = 0$ ist, d.h. kein Restsegment vorhanden ist. Diese Beobachtung ist nicht verwunderlich, denn die Ergebnisse im Punkt 11.3.4 sind ja auf Grund der Annahme gewonnen worden, daß genau K Segmente der vollständigen Länge L für den Schätzwert zur Verfügung stehen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Berücksichtigung von Restsegmenten vor allem für kurze Datensätze bzw. kleine BN -Werte notwendig ist. In diesen Fällen ist auch die Abhängigkeit der Varianz vom Überlappungsgrad q sehr groß, so daß es sinnvoll erscheint, in einem Digitalprogramm zur Berechnung von WB -Schätzwerten auch die Bestimmung des günstigsten q -Wertes anhand von Gl.(11.69) vorzusehen /157/. Andererseits ist zu überlegen, ob es nicht günstiger ist, solche Schätzungen nach der BT -Methode durchzuführen.

Die besonderen Vorteile des WB -Schätzverfahrens liegen in der Verarbeitung langer Datensätze und großer BN -Werte. Hierbei ist der Einfluß des Restsegmentes auf die Varianz der Schätzung klein, und es kann mit den Ergebnissen aus Punkt 11.3.4 gearbeitet werden. Diese bilden die Grundlage für die Planung einer WB -Spektralanalyse, die im nächsten Punkt beschrieben wird.

11.3.6 Entwurf einer WB-Spektralanalyse

Während bei den bisherigen Betrachtungen von einer festen Datenlänge N ausgegangen worden ist, geht es im folgenden um die Frage, wie eine Schätzung durchzuführen ist, damit man einen Spektralschätzwert mit einer bestimmten Auflösung und einer geforderten Genauigkeit erhält. Dies ist dieselbe Ausgangssituation wie im Punkt 11.2.7 für die BT-Schätzwerte.

Durch die größte noch interessierende Frequenz f_m wird die Abtastfrequenz

$$f_{ab} = \frac{1}{\Delta t} \geq f_m$$

bestimmt. Zur Vermeidung von Alias-Fehlern sollte bei mangelnder Information über die Bandbreite des Prozesses eine geeignete analoge Bandbegrenzung durchgeführt werden.

Aus der geforderten Auflösung Δf ergibt sich damit die äquivalente Bandbreite zu

$$B = \Delta f \cdot \Delta t,$$

vorausgesetzt, daß Δf größer als die kleinste interessierende Frequenz f_u ist, andernfalls erhält man

$$B = f_u \cdot \Delta t.$$

Auf Grund der Feststellung im Punkt 11.3.4, daß die Zahl der zu berechnenden Periodogramme i.w. unabhängig vom Typ der Datengewichtung ist, sollte sich die Auswahl dieser nach Möglichkeit an der Dynamik des zu schätzenden Spektrums orientieren. Wenn ein relativ glattes Spektrum erwartet wird, reicht ggf. die Dreiecksgewichtung mit $\kappa^* = -27$ dB aus, wogegen für Spektren mit ausgeprägten Spitzen oder Einbrüchen eine Gewichtung mit besserem Verhalten bezüglich der Nebenmaxima verwendet werden muß.

Im Hinblick auf die erwähnten rechentechnischen Vorteile und dem kleinsten $k_b^* \cdot k_v^{*2}$ -Wert der im Punkt 11.3.3 diskutierten Datengewichtungen stellt die cos-Gewichtung mit $\kappa^* = -31,5$ dB einen günstigen Kompromiß dar.

Nachdem man sich für eine bestimmte Datengewichtung entschieden hat, ergibt sich aus der geforderten statistischen Genauigkeit in Form der relativen Varianz

$$\eta^2 = \frac{\text{var } \hat{S}_N(\lambda)}{S_x^2(\lambda)}$$

entweder aus einem Diagramm entsprechend Bild 11.23 oder einer analytischen Näherung wie Gl.(11.66) die erforderliche Zahl N von Abtastwerten und damit die Signallänge

$$T = N \cdot \Delta t.$$

Im Falle einer cos-Gewichtung gilt z.B. mit Gl.(11.66)

$$BN = \frac{1}{\eta^2} + 1,19,$$

und aus Bild 11.23 kann dafür der optimale Überlappingsgrad q^* entnommen werden. Die benötigte Segmentlänge erhält man aus Gl.(11.54) zu

$$L = \left\lfloor \frac{1}{k_V \cdot \beta} \right\rfloor + 1,$$

obei $\lfloor z \rfloor$ wiederum für die größte ganze Zahl steht, die noch kleiner als z ist. Damit liegt die Anzahl der Segmente

$$K = \left\lfloor \frac{\frac{N}{L} - 1}{1 - q} \right\rfloor + 1$$

sowie nach Gl.(11.60) auch die Segmentverschiebung

$$I = \left\lfloor \frac{N - L}{K - 1} \right\rfloor$$

fest. Auf Grund der durchgeführten Rundungen weicht die tatsächlich benötigte Zahl von Daten

$$N^* = (K-1) \cdot I + L$$

i.a. geringfügig von dem zunächst bestimmten Wert N ab.

Zum Abschluß dieses Punktes soll ein konkretes Beispiel skizziert werden: Für die Analyse einer radiometrischen Meßeinrichtung ist ein Spektrum im Bereich $10 \text{ mHz} \leq f \leq 2 \text{ Hz}$ mit einer Genauigkeit von $\eta^2 = 0,01$ zu messen. Mit $f_{ab} = 4 \text{ Hz}$ ergibt sich

$$\beta = 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{4} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

und

$$N = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\eta^2} + 1,19 \right) = 40\,476 \quad \text{bzw.} \quad BN \approx 100.$$

Es ist offensichtlich, daß bei dieser Datenrate die im Abschnitt 11.4 dargestellte direkte Methode nicht mehr und die indirekte nur bei einer geeigneten Speicherplatz sparenden Berechnung des Kovarianzschätzwertes $\hat{C}_N(k)$ anwendbar sind / 30 /.

Bei Verwendung einer cos-Datengewichtung beträgt die Segmentlänge

$$L = \left\lfloor \frac{1}{0,481\beta} \right\rfloor + 1 = 832,$$

und für die Anzahl der Segmente erhält man mit $q^* = 70,2\%$ aus Bild 11.23 $K = 160$. Die Segmentverschiebung ergibt sich zu $I = 249$, so daß tatsächlich $N^* = 40\,423$ Daten verarbeitet werden müssen.

11.3.7 Anmerkungen zum Rechenaufwand

Es ist schon gesagt worden, daß für sehr große Datenlängen N die WB-Methode aus rechentechnischen Gründen den BT- und Periodogramm-Verfahren vorzuziehen ist. Im folgenden soll ein Überblick über den Rechenaufwand anhand eines Vergleichs zwischen der BT- und der WB- Methode vermittelt werden. Dabei basieren die Aussagen auf Abschätzungen, in denen nur die wesentlichen Rechenschritte in Form der benötigten Anzahl von reellen Multiplikationen und Additionen (M/A-Operationen) berücksichtigt werden.

Ausgangspunkt der Überlegungen sind reelle Daten $x_N(n)$, wobei im Hinblick auf die Verwendung der FFT der Einfachheit halber $N = 2^P$ gewählt wird. Als Aufwand für die Berechnung einer FFT von $L = 2^m$ reellen Daten werden

$$N_L = L(1 + \lg L) = 2^m(1 + m)$$

reelle M/A-Operationen zugrundegelegt /289/.

Die indirekte Berechnung eines BT-Schätzwertes geht von einem Schätzwert für die Kovarianzgewichtung aus, der hier über den "Umweg" des Periodogramms berechnet werden soll, vgl. Bild 11.1c. Dazu werden i.w. zwei FOURIER-Transformationen der Länge $2N$ ¹⁾ und N reelle M/A-Operationen für die Bildung des Betragsquadrates benötigt. Das ergibt insgesamt

$$N_{\hat{C}} = N(9 + 4 \lg N) = 2^P (9 + 4p)$$

Operationen. Für die weitere Berechnung sind noch M reelle Multiplikationen für die Kovarianzgewichtung mit $w_M(k)$ und eine FFT der Länge $2M$ erforderlich. Damit ergibt sich die Anzahl der M/A-Operationen für die Berechnung eines BT-Schätzwertes nach Bild 11.1c zu

$$N_{BT} = N(9 + 4 \lg N) + M(5 + 2 \lg M)$$

Demnach werden z.B. für die Berechnung eines Schätzwertes aus $N = 1024$ Daten mit $M = N/8 = 128$ etwa $N_{BT} = 52\,608$ reelle M/A-Operationen benötigt. Diese Zahl ist unabhängig vom Typ der verwendeten Kovarianzgewichtung, wenn angenommen wird, daß $w_M(k)$ in einer "Liste" gespeichert ist.

Bei den WB-Schätzwerten hängt der Rechenaufwand wegen der unterschiedlichen Überlappungsgrade und Segmentlängen vom Typ der Datengewichtung ab. Für den Vergleich wird eine cos-Datengewichtung zugrundegelegt, so daß sich für $L = M$ ein WB-Schätzwert mit der gleichen äquivalenten Bandbreite β ergibt wie ein BT-Schätzwert auf der Grundlage einer GAUSS-Kovarianzgewichtung ($k_v^* = k_v = 0,48$). Dabei bleibt der Mehraufwand für die bei kurzen Datensätzen notwendige Verarbeitung des Restsegmentes ebenso unberücksichtigt wie die Möglichkeit der

1) vgl. die Anmerkungen zum Gebrauch der DFT im Punkt 11.2.8

Rechenzeiterparnis durch das Arbeiten mit Überlappungsgraden $q < q^*$.
 Pro Segment werden i.w. L Multiplikationen für die Datengewichtung, eine FFT der Länge $2L$ und L reelle M/A-Operationen für die Bildung des Betragsquadrates benötigt. Berücksichtigt man noch L Operationen für die Mittelwertbildung, so sind insgesamt für die Berechnung eines WB-Schätzwertes nach Bild 11.1e

$$N_{WB} = KL(6 + 21dL) + L$$

reelle M/A-Operationen erforderlich, wobei nach Punkt 11.3.6

$$K = \left\lfloor \frac{\frac{N}{L} - 1}{1 - q} \right\rfloor + 1$$

ist.

Für das oben verwendete Beispiel mit $N = 1024$ und $L = 128$ ist

$$BN = \frac{N}{k_v \cdot L} = \frac{8}{0,48} \approx 16,7,$$

so daß sich mit $q^* = 0,67$ aus Bild 11.23 für die Anzahl der Segmente $K = 22$ ergibt. Damit werden für die Berechnung eines WB-Schätzwertes etwa $N_{WB} = 56\,448$ M/A-Operationen benötigt, das sind etwa $\frac{1}{2}$ mehr als für den entsprechenden BT-Schätzwert. Dazu muß ergänzend bemerkt werden, daß auch die Varianz der WB-Schätzung um etwa 8% größer ist, wie aus Bild 11.23 für $BN = 16,7$ entnommen werden kann.

Im Bild 11.26 ist das Verhältnis N_{WB}/N_{BT} für verschiedene Parameterwerte BN als Funktion der Datenlänge N dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die WB-Methode nur für kleine BN vom Rechenaufwand her günstiger ist als das BT-Verfahren. In diesen Fällen ist aber die Varianz deutlich schlechter (bei $BN = 8,3$ etwa 17%, Bild 11.23), so daß man hier angesichts des kleinen absoluten Rechenaufwands besser mit der BT-Methode arbeitet.

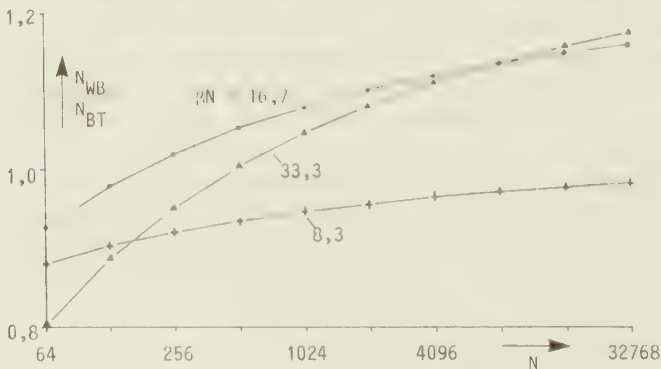


Bild 11.26

Für lange Datensätze und damit große BN-Werte sind es, wie in den Vorbemerkungen zu den WB-Schätzwerten bereits gesagt worden ist, vor allem rechentechnische Überlegungen bezüglich Speicherplatzbedarf und Rundungsfehler, die die WB-Methode attraktiver erscheinen lassen. Dieser Trend wird dadurch begünstigt, daß für $BN > 30$ hinsichtlich der Varianz der beiden Verfahren kein Unterschied mehr besteht.

11.4 Ein zweistufiges Schätzverfahren

In diesem Abschnitt wird ein von NUTTALL & CARTER /156/ vorgeschlagenes Schätzverfahren untersucht, bei dem zunächst ein WB-Schätzwert gewonnen wird, der dann in einer zweiten Stufe indirekt, d.h. über eine Kovarianzgewichtung zusätzlich geglättet wird.

Die Motivation für dieses Verfahren liegt nach /156/ vor allem darin, daß durch die Verwendung "unüblicher" Kovarianzgewichte in der zweiten Stufe Leistungsverflechtungen auf Grund einer "schlechten", z.B. Rechteck-Daten-gewichtung im WB-Schätzwert nachträglich kompensiert werden können. Diese als "lag reshaping" bezeichnete Technik ist früher schon von VAN SCHOONEVELD & FRIJLING /147/ untersucht und verworfen worden, weil die Kompensation der Leistungsverflechtung angeblich nur im Mittel, nicht aber bei einem individuellen Schätzwert wirksam wird.

Da eigene Untersuchungen zu dieser Frage noch im Gange sind, wird darauf nur kurz im Zusammenhang mit dem Erwartungswert eingegangen.

Der eigentliche Grund für die Behandlung des zweistufigen Schätzverfahrens ist, daß es eine Zusammenfassung der gebräuchlichen nichtparametrischen Spektralschätzmethoden darstellt und die in den voranstehenden Abschnitten ausführlich diskutierten BT-, Periodogramm- und WB- Schätzwerte als Sonderfälle beinhaltet.

Für die Darstellung werden die im voranstehenden Abschnitt eingeführten Bezeichnungen und Vereinbarungen beibehalten. Demnach ergibt sich der WB-Schätzwert der ersten Stufe gemäß Gl.(11.45) in der Form

$$\hat{S}_N(\lambda) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} P_L(\lambda; k) .$$

Zu diesem ersten Schätzwert für die Leistungsdichte wird der zugehörige Kovarianzschätzwert

$$\hat{C}_N(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_N(\lambda) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda , \quad |k| < L ,$$

bestimmt und daraus der zweite "indirekte" Schätzwert

$$\tilde{S}_N(\lambda) = \sum \hat{c}_N(k) w_M(k) e^{-j2\pi\lambda k}, \quad |k| < L \quad (11.70)$$

gebildet, wobei für den Fensterkoeffizienten $M \leq L$ gelten muß, vgl. Abschnitt 11.2. Mit dem "quadratischen" Spektralfenster $w_M(\lambda)$ stellt sich Gl.(11.70) in der alternativen Form

$$\tilde{S}_N(\lambda) = \int_{-1/2}^{1/2} S_N(\lambda - \zeta) w_M(\zeta) d\zeta \quad (11.71)$$

dar.

11.4.1 Erwartungswert und Varianz

Mit den Ergebnissen aus Punkt 11.3.2 lassen sich die statistischen Eigenschaften des "zweistufigen" Schätzwertes $\tilde{S}_N(\lambda)$ relativ einfach angeben. Zunächst ergibt sich mit Gl.(11.53)

$$\mathcal{E} \tilde{S}_N(\lambda, e) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\lambda - v) \int_{-1/2}^{1/2} w_M(v - u) |D_L(u)|^2 du dv, \quad (11.72)$$

und man erkennt, daß wie bei den Periodogramm- und BT- Schätzwerten, vgl. Punkt 11.2.1, der Erwartungswert durch Faltung von $S_X(\lambda)$ mit dem "linearen" Spektralfenster $|D_L(\lambda)|^2$ und dem "quadratischen" Fenster $w_M(\lambda)$ entsteht:

$$\mathcal{E} \tilde{S}_N(\lambda, e) = S_X(\lambda) * |D_L(\lambda)|^2 * w_M(\lambda).$$

Im Zeitbereich entspricht diese zweifache Faltung der Darstellung

$$\mathcal{E} \tilde{S}_N(\lambda, e) = \sum c_X(k) r_{dL}(k) w_M(k) e^{-j2\pi\lambda k},$$

wobei in Verbindung mit Gl.(11.70) deutlich wird, daß der Zusammenhang

$$\mathcal{E} \hat{c}_N(k, e) = c_X(k) r_{dL}(k) \quad |k| < L,$$

besteht. Das Produkt

$$w_e(k) = w_M(k) r_{dL}(k)$$

wird effektive Kovarianzgewichtung genannt; entsprechend heißt die zugehörige FOURIER-Transformierte

$$w_e(\lambda) = w_M(\lambda) * |D_L(\lambda)|^2$$

effektives Spektralfenster, vgl. Punkt 11.2.1. Es ist leicht einzusehen, daß durch geeignete Wahl von $w_M(k)$ die effektive Kovarianzgewichtung und

damit $W_e(\lambda)$ so beeinflußt werden können, daß im Erwartungswert der Schätzung keine wesentliche Leistungsverfleischung auf Grund der Nebenmaxima des Spektralfensters auftritt. Angenommen, es wird mit einer Rechteck-Datengewichtung, d.h. $r_{dL}(k) = 1 - |k|/L$ für $|k| \leq L$, gearbeitet, und es soll ein Schätzwert mit den Eigenschaften der PARZEN-Gewichtung $w_p(k)$ (vgl. Punkt 11.2.6) erreicht werden, so braucht offensichtlich nur

$$w_M(k) = \frac{w_p(k)}{1 - \frac{|k|}{L}} \quad |k| \leq M \leq L,$$

gewählt zu werden, damit

$$\mathcal{E} \tilde{S}_N(\lambda, e) = S_x(\lambda) * w_p(\lambda)$$

gilt. Allerdings ist diese Kovarianzgewichtung nicht positiv semidefinit, so daß der Schätzwert $\tilde{S}_N(\lambda)$ negativ werden kann. Hierin ist nach /147/ der Grund zu sehen, daß die Kompensation der Leistungsverfleischung nur im Mittel, d.h. für den Erwartungswert wirksam ist, nicht jedoch für einen einzelnen Schätzwert.

Aus Gl.(11.72) folgt, daß auch die zweistufige Schätzung i.a. nur asymptotisch erwartungstreu ist. Wenn $S_x(\lambda)$ im Durchlaßbereich von $W_e(\lambda)$ näherungsweise als konstant angesehen werden kann, so erhält man

$$\mathcal{E} \tilde{S}_N(\lambda, e) \approx S_x(\lambda) \int_{-1/2}^{1/2} W_e(\lambda) d\lambda = S_x(\lambda) w_M(0) r_{dL}(0) = S_x(\lambda),$$

vorausgesetzt, daß die Kovarianz- und die Datengewichtung die Normierungsbedingungen (11.8) bzw. (11.49) erfüllen.

Für die Berechnung der Varianz der "zweistufigen" Schätzung reichen die Ergebnisse aus Abschnitt 11.3 nicht aus, vielmehr wird darüber hinaus die Kovarianz von WB-Schätzwerten für unterschiedliche Frequenzen benötigt:

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{S}_N(\lambda, e) &= \mathcal{E} \tilde{S}_N^2(\lambda, e) - \mathcal{E}^2 \tilde{S}_N(\lambda, e) \\ &= \iint_{-1/2}^{1/2} \text{cov} \{ \hat{S}_N(u, e), \hat{S}_N(v, e) \} w_M(\lambda-u) w_M(\lambda-v) du dv. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Die Bestimmung der Kovarianz kann in völliger Analogie zur Ableitung der Varianz eines WB-Schätzwertes im Punkt 11.3.2 durchgeführt werden, wozu wiederum vorausgesetzt werden muß, daß die Meßdaten als Musterfolge eines GAUSSverteilten Prozesses angesehen werden können. Damit erhält man nach einer längeren Rechnung

$$\text{cov} \{ \hat{S}_N(u, e), \hat{S}_N(v, e) \} = \frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K} \right) [B_1(u, v; \kappa) + B_2(u, v; \kappa)]$$

mit

$$B_1(u, v; \kappa) = \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) e^{j2\pi\zeta\kappa I} D_L(\zeta+u) \overline{D_L(\zeta-v)} d\zeta \right|^2$$

und

$$B_2(u, v; \kappa) = \left| \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) e^{j2\pi\zeta\kappa I} D_L(\zeta-u) \overline{D_L(\zeta-v)} d\zeta \right|^2$$

Beachtet man, daß

$$\frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K} \right) e^{j2\pi(\zeta-\xi)\kappa I} = \left[\frac{\sin \pi K I (\zeta-\xi)}{K \sin \pi I (\zeta-\xi)} \right]^2 \quad (11.74)$$

ist, so läßt sich die Kovarianz des WB-Schätzwertes auch in der Form

$$\text{cov} \{ \hat{S}_N(u, e), \hat{S}_N(v, e) \} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) S_X(\xi) \left[\frac{\sin \pi K I (\zeta-\xi)}{K \sin \pi I (\zeta-\xi)} \right]^2 \cdot$$

$$\cdot [D_L(\zeta+u) \overline{D_L(\xi+u)} + D_L(\zeta-u) \overline{D_L(\xi-u)}] \overline{D_L(\zeta-v)} D_L(\xi-v) d\zeta d\xi$$

darstellen. In Verbindung mit Bild 11.27, in dem die Lage der beteiligten Frequenzfunktionen $D_L(\cdot)$ schematisch dargestellt ist, wird deutlich, daß der erste Summand in der eckigen Klammer praktisch keinen Beitrag zum Integral leistet und deshalb vernachlässigt werden kann (wenn $u < 0$ ist, gilt die Aussage für den zweiten Summanden).

Damit erhält man aus Gl.(11.73) die genäherte Darstellung

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) S_X(\xi) \left[\frac{\sin \pi K I (\zeta-\xi)}{K \sin \pi I (\zeta-\xi)} \right]^2 D_L(\zeta-u) \overline{D_L(\xi-u)} \cdot \\ &\cdot D_L(\zeta-v) \overline{D_L(\xi-v)} W_M(\lambda-u) W_M(\lambda-v) d\zeta d\xi du dv, \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} S_X(\zeta) S_X(\xi) \left[\frac{\sin \pi K I (\zeta-\xi)}{K \sin \pi I (\zeta-\xi)} \right]^2 \cdot \\ &\cdot \left| \int_{-1/2}^{1/2} W_M(\lambda-u) D_L(\zeta-u) \overline{D_L(\xi-u)} du \right|^2 d\zeta d\xi, \end{aligned}$$

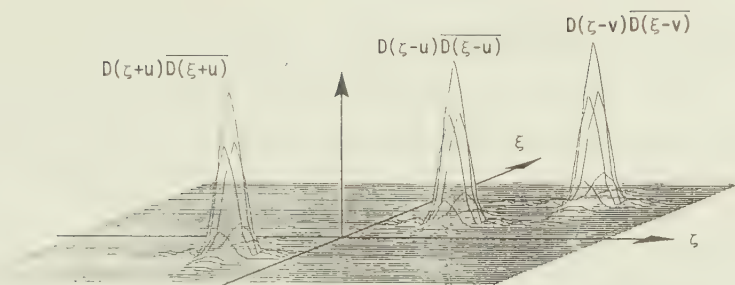


Bild 11.27

die sich entscheidend vereinfachen läßt, wenn die bei Varianzabschätzungen übliche Annahme getroffen wird, daß S_x im Durchlaßbereich der Spektralfunktion, d.h. in der Umgebung der interessierenden Frequenz λ näherungsweise konstant ist. Dann ergibt sich nämlich in Verbindung mit Gl.(11.74) die Form

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{S}_N(\lambda, e) &\approx S_x^2(\lambda) \frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) \iint_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi K I(\zeta - \xi)} \cdot \\ &\cdot \left| \int_{-1/2}^{1/2} w_M(\lambda - u) D_L(\zeta - u) \overline{D_L(\xi - u)} du \right|^2 d\zeta d\xi, \end{aligned}$$

die sich weiter vereinfacht, wenn das Doppelintegral als zweidimensionale FOURIER-Transformation der durch das Betragsquadrat definierten Funktion interpretiert und im "Zeitbereich" dargestellt wird:

$$\text{var } \tilde{S}_N(\lambda, e) \approx S_x^2(\lambda) \frac{1}{K} \sum_{1-K}^{K-1} \left(1 - \frac{|K|}{K}\right) \sum_k w_M^2(k) r_{d2}(k, \kappa I). \quad (11.75)$$

Dies ist eine brauchbare Form für die numerische Berechnung der Varianz des "zweistufigen" Schätzwertes. In diesem Ergebnis ist

$$r_{d2}(k, \kappa I) = \sum_n d_L(n) d_L(n-k) d_L(n+\kappa I) d_L(n+\kappa I-k)$$

eine zweidimensionale Korrelationsfunktion, durch die sowohl die Korrelation der Datengewichtung selbst als auch die auf Grund der Segmentüberlappung erfaßt wird.

Aus Gl.(11.75) lassen sich zwei bekannte Ergebnisse ableiten. Für $L = N$, d.h. $K = 1$ und einer Rechteck-Datengewichtung nach Gl.(11.46) ergibt sich für die Korrelationsfunktion

$$r_{d2}(k, 0) = \sum_n d_N^2(n) d_N^2(n-k) = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right), \quad |k| \leq N,$$

und damit

$$\text{var } \tilde{S}_N(\lambda, e) \approx S_X^2(\lambda) \frac{1}{N} \sum_k (1 - |k|/N) w_M^2(k) .$$

Mit $M \ll N$ und dem PARSEVALschen Satz folgt daraus

$$\text{var } \tilde{S}_N(\lambda, e) \approx S_X^2(\lambda) \frac{1}{N} \sum w_M^2(k) = S_X^2(\lambda) \frac{1}{N} \int_{-1/2}^{1/2} w_M^2(\lambda) d\lambda ,$$

das Ergebnis (11.26) für die Periodogramm- und BT- Schätzwerte.

Für den Fall, daß keine Glättung in einer zweiten Stufe durchgeführt wird, ist

$$w_M(k) = 1 \quad \text{für } |k| \leq L,$$

und es ist

$$\begin{aligned} \sum_k r_{d2}(k, \kappa I) &= \sum_n \left[d_L(n) d_L(n + \kappa I) \sum_k d_L(n - k) d_L(n - k + \kappa I) \right] \\ &= r_{dL}^2(\kappa I) . \end{aligned}$$

Damit reduziert sich Gl.(11.75) auf das Ergebnis (11.59) für die WB-Schätzwerte.

11.4.2 Zusammenhänge mit anderen Verfahren

Bei der Abschätzung der Varianz im voranstehenden Punkt ist bereits gezeigt worden, daß frühere Ergebnisse für Periodogramm-, BT- und WB-Schätzwerte als Sonderfälle in der Näherung (11.75) enthalten sind. Im folgenden werden diese Zusammenhänge anhand der einzelnen Schritte, die zur Berechnung der verschiedenen Schätzwerte erforderlich sind, noch einmal verdeutlicht.

Das Schema im Bild 11.28 zeigt in der linken Spalte eine Folge von Operationen im Zeitbereich und in der rechten die dazu äquivalenten Größen bzw. Operationen im Frequenzbereich. Die horizontalen Verbindungen symbolisieren dabei den Zusammenhang über die FOURIER-Transformation; sie können prinzipiell in beiden Richtungen durchlaufen werden. Verfolgt man den durch die gestrichelte Linie besonders gekennzeichneten Weg, so erhält man die zur Berechnung eines "zweistufigen" Schätzwertes mit indirekter Glättung notwendigen Schritte:

- 1: Zerlegung der Daten in K Segmente der Länge L
- 3: Gewichtung der Teildaten (für den Fall einer cos-Datengewichtung kann der Weg 1→2→4 günstiger sein)

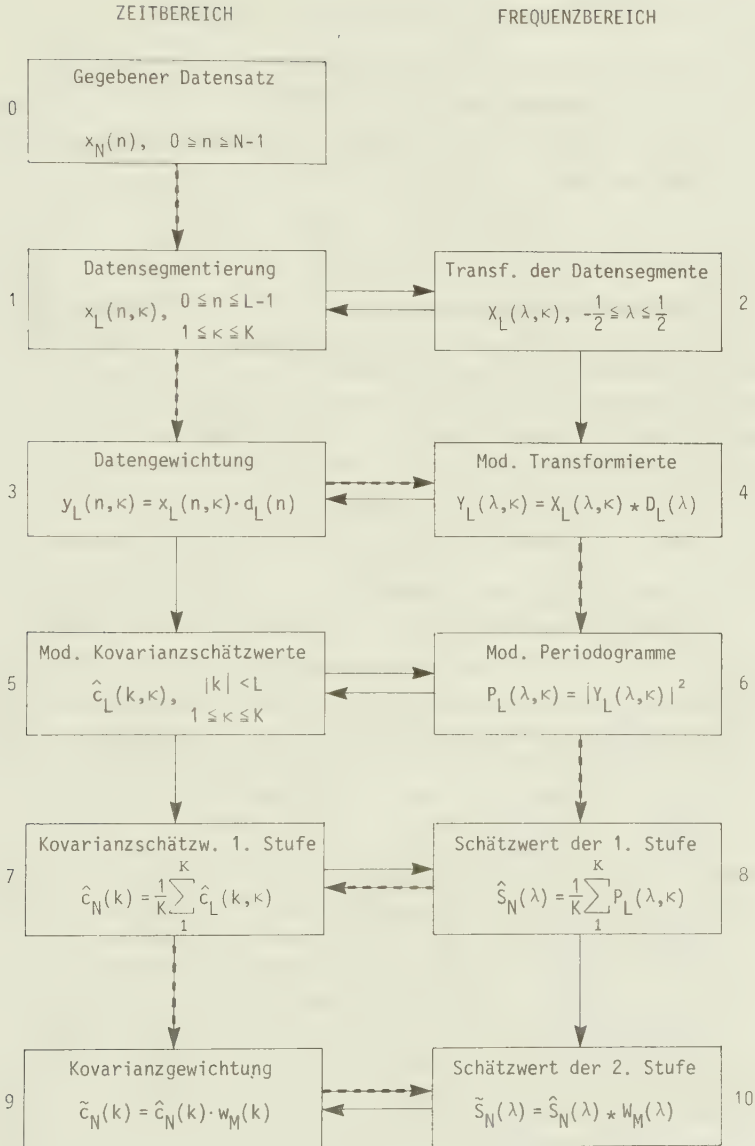


Bild 11.28

- 4: FOURIER-Transformation der gewichteten Datenssegmente
- 6: Berechnung der modifizierten Periodogramme
- 8: Bildung des WB-Schätzwertes (1. Stufe)
- 7: Inverse FOURIER-Transformation zur Berechnung des entsprechenden Kovarianzschätzwertes $\hat{c}_N(k)$
- 9: Gewichtung dieses Schätzwertes mit $w_M(k)$
- 10: FOURIER-Transformation zur Bildung von $\tilde{s}_N(\lambda)$.

Im Prinzip kann das Schema im Bild 11.28 auf beliebigen Wegen längs der Pfeile durchlaufen werden, wobei man alle Rechenschritte zur Bestimmung eines der Schätzwerte (8) oder (10) erfaßt. Um zu zeigen, wie sich verschiedene gebräuchliche oder historisch interessante (nicht parametrische) Schätzverfahren in diesen übergeordneten Rahmen einfügen, werden im folgenden die jeweiligen "Wege" mit kurzen Kommentaren aufgelistet.

a) Indirekter Schätzwert (ohne Periodogramm), vgl. Bild 11.1a:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \quad (K = 1, L = N)$$

Im Fall der Rechteck-Datengewichtung braucht Schritt 3 nicht extra ausgeführt zu werden und Schritt 7 entfällt wegen $K = 1$.

b) Indirekter oder BT-Schätzwert (im ursprünglichen Sinn), Bild 11.1b:

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \quad (K = 1, L = N)$$

Die Schritte 3 und 8 entfallen wegen Rechteck-Gewichtung bzw. $K = 1$.

c) Indirekter Schätzwert, $\hat{c}_N(k)$ über Periodogramm, Bild 11.1c:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \quad (K = 1, L = N)$$

Für die Rechteck-Datengewichtung ist Schritt 4 im Übergang $1 \rightarrow 2$ enthalten. Schritt 7 entfällt wegen $K = 1$.

d) Indirekter Schätzwert mit Datengewichtung:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \quad (K = 1, L = N)$$

Schritt 7 entfällt wegen $K = 1$.

e) Verallgemeinerte BT-Methode:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \quad (K = 1, L = N)$$

Schritt 8 entfällt wegen $K = 1$

f) Direkter oder Periodogramm-Schätzwert, vgl. Bild 11.1d:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \quad (K' = 1, L = N)$$

Schritt 4 entfällt wegen Rechteckgewichtung, Schritt 8 wegen $K = 1$.

g) Modifizierter Periodogramm-Schätzwert (indirekt mit Datengewichtung):

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \quad (K = 1, L = N)$$

Wegen $K = 1$ entfällt Schritt 8.

h) BARTLETT-Schätzwert (historisch)

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \quad (K = N/L, \text{ keine Segmentüberlappung})$$

Schritt 4 ist wegen der zugrunde liegenden Rechteck-Gewichtung in 2 enthalten.

i) WB-Schätzwert, vgl. Bild 11.1e:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8$$

Im Falle einer cos-Datengewichtung kann der Weg $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ evtl. günstiger sein.

j) Zweistufiger direkt geglätteter Schätzwert

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10.$$

Mit dieser Übersicht über gebräuchliche und historisch interessante Methoden zur Schätzung der Leistungsdichte und ihre Einbettung in ein übergeordnetes Rahmenwerk in Form des zweistufigen Schätzverfahrens soll dieses Kapitel über die digitalen nichtparametrischen Schätzverfahren abgeschlossen werden.

Diese Verfahren bilden seit ihrer Entwicklung Anfang der fünfziger Jahre, vor allem aber nach der Einführung der FFT im Jahre 1965, wodurch das Werkzeug für eine sehr effiziente Berechnung bereitgestellt worden ist, einen Schwerpunkt im Bereich der statistischen Spektralanalyse.

Ende der sechziger Jahre setzt mit der Einführung der sogenannten parametrischen Schätzverfahren eine neue Entwicklung ein. Diese Verfahren, bei denen der Schätzwert für die Leistungsdichte nicht unmittelbar aus den Daten gewonnen, sondern aus den geschätzten Parametern eines geeigneten Prozeßmodells gebildet wird, sind Gegenstand des folgenden 12. Kapitels.

12. Parametrische digitale Spektralschätzverfahren

Die sogenannten "parametrischen" Verfahren zur Schätzung der spektralen Leistungsdichte unterscheiden sich grundsätzlich von den in den voranstehenden Kapiteln untersuchten analogen und digitalen Verfahren dadurch, daß der Schätzwert nicht aus einer konkreten Schätzvorschrift

$$\hat{S}_x = \mathcal{T}[x_N(n)]$$

für die Leistungsdichte selbst gewonnen wird, vgl. Abschnitt 9.1, sondern das Ergebnis einer Modellbildung für den unterlegten stationären stochastischen Prozeß ist. Die gegebenen Daten $x_N(n)$ werden dabei als Teil einer Musterfunktion dieses Prozesses angesehen und die Schätzung bezieht sich auf die Bestimmung der Modellparameter.

Die Auswahl eines geeigneten Modells und die Bestimmung der Parameter ist offensichtlich eng mit der Identifizierung technischer Systeme verwandt /263/. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, daß für die Modellierung eines Spektralschätzwertes nur das Ausgangssignal des Modells gegeben ist, während für die Identifizierung i.a. Information sowohl über den Ein- als auch über den Ausgangsprozesse des Systems zur Verfügung steht.

Im folgenden werden ausschließlich "rationale" Modelle betrachtet, wie sie im 7. Kapitel in Form der autoregressiven (AR), der "moving-average" (MA) und der gemischten ARMA-Prozesse eingeführt worden sind. Die Beschränkung auf rationale Modelle wird dadurch gerechtfertigt, daß jedes in λ stetige Dichtespektrum für hinreichend große K und L beliebig genau durch eine rationale Funktion der Form

$$\tilde{S}_x(\lambda) = \frac{|1 + \sum_{l=1}^L b_l e^{-j2\pi\lambda l}|^2}{|1 + \sum_{k=1}^K a_k e^{-j2\pi\lambda k}|^2} S_0, \quad (12.1)$$

angenähert werden kann / 22/.

Vergleicht man diesen Ansatz mit der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung, so erhält man eine interessante Deutung der parametrischen Spektralschätzwerte: Die durch das Modell festgelegte Form der Leistungsdichte stellt eine endliche rationale Approximation der Reihenentwicklung

$$S_x(\lambda) = \sum c_x(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

dar.

Parametrische Modelle zur Beschreibung stationärer stochastischer Prozesse sind bereits 1927 von YULE /91/ verwendet worden, vgl. S.12; für die Schätzung der spektralen Leistungsdichte haben sie jedoch erst mit der Einführung des sogenannten "Maximum-Entropie"-Spektrums durch BURG /183,184/ und dem Vorschlag von PARZEN /138/, autoregressive Modelle als Grundlage für die Schätzung der Leistungsdichte zu nehmen, an Bedeutung gewonnen.

Im Abschnitt 7.2 ist gezeigt worden, daß jeder Prozeß mit einem stetigen Leistungsdichtespektrum eine MA-Darstellung besitzt, so daß es eigentlich naheliegend wäre, Spektralschätzungen vornehmlich auf der Grundlage von MA-Modellen durchzuführen. Dagegen sprechen i.w. zwei Gründe: Zum einen führt die Bestimmung der MA-Parameter auf ein nichtlineares Gleichungssystem, das nur mit Hilfe von Näherungsverfahren gelöst werden kann, und zum anderen läßt sich zeigen, daß Spektralschätzwerte auf der Grundlage eines MA-Prozeßmodells im Prinzip mit einem BT-Schätzwert übereinstimmen, für den die Berechnung der Modellparameter gar nicht erforderlich ist. Im folgenden wird deshalb das Problem der Spektralschätzung auf Grund von MA-Modellen nur sehr knapp behandelt, Abschnitt 12.3.

Einen Schwerpunkt in den Darstellungen bilden die Schätzverfahren auf der Grundlage eines AR-Modells. Diese Verfahren haben sowohl im Hinblick auf theoretische Untersuchungen als auch was den praktischen Einsatz anbelangt innerhalb der parametrischen Spektralschätzverfahren die größte Bedeutung erlangt. Ein wesentlicher Grund dafür ist, daß die Bestimmung der AR-Parameter ein lineares Problem darstellt, für dessen Lösung effiziente Rechenalgorithmen zur Verfügung stehen. Weitere Gründe für die Bedeutung der AR-Schätzwerte sind in dem Zusammenhang mit dem ME-Prinzip und der Linearen Prädiktion zu sehen. Es zeigt sich nämlich, daß das AR-Modell ein prädiktives Modell in dem Sinne ist, daß es Aussagen über die Kovarianzfunktion außerhalb des durch die endlichen Daten $x_N(n)$, $0 \leq n < N$, festgelegten Intervalls ermöglicht.

In jüngerer Zeit hat sich das Interesse zunehmend auf die Entwicklung von ARMA-Schätzverfahren verlagert. Das hat verschiedene Ursachen, auf die im Punkt 12.4 näher eingegangen wird.

Die Bestimmung der MA- und AR- Parameter eines ARMA-Modells erfordert wie im Falle der MA-Schätzwerte die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. In der Literatur sind dazu zahlreiche Näherungsverfahren angegeben worden, deren Diskussion den Rahmen dieser Übersichtsarbeit sprengen würde. Aus diesem Grunde wird im Abschnitt 12.4 nur auf einige grundsätzliche Zusammenhänge bei den ARMA-Schätzwerten eingegangen.

Im Abschnitt 12.2 wird ein als "Maximum-Likelihood" bezeichnetes Spektralschätzverfahren dargestellt, das ursprünglich von CAPON /239/ zur Schätzung von Wellenzahl-Spektren seismischer Signale entwickelt worden ist. An den Anfang der Betrachtungen soll jedoch die ME-Schätzung von BURG gestellt werden, aus deren Motivation die Unterschiede zu den nichtparametrischen Schätzverfahren und die Gründe für das wachsende Interesse an den parametrischen Methoden besonders deutlich werden.

12.1 Die ME/AR-Schätzwerte

Die Verwendung von Daten- und Kovarianzgewichten in den nichtparametrischen Schätzverfahren enthält implizit die Annahme, daß $\hat{x}_N(n)$ und $\hat{c}_N(k)$ außerhalb der Gewichtungen gleich Null sind bzw. beim Einsatz der FFT periodisch fortgesetzt werden. Die Folge davon sind Leistungsverflechtungen sowie eine begrenzte Auflösung der Schätzwerte unabhängig von den spektralen Eigenschaften des zugrundeliegenden Prozesses. Die Auflösung wird zusätzlich durch die notwendige Pseudo-Erwartungswert-Bildung zur Reduktion der Varianz verschlechtert.

Der Versuch, diese Probleme zu umgehen, die speziell bei kurzen Datensätzen sehr schlechte Schätzwerte bedingen, haben zur Einführung der sogenannten Maximum-Entropie-Methode durch BURG /183,184/ geführt.

Dabei werden zunächst die in der Verwendung von Daten- und Kovarianzgewichten begründeten willkürlichen Annahmen fallengelassen, indem die aus den Meßdaten berechneten Kovarianzwerte unverändert bleiben und darüber hinaus benötigte Werte durch Extrapolation gewonnen werden. Diese Vorgehensweise findet ihren Niederschlag in dem Zusammenhang mit der Linearen Prädiktion und hat zur Folge, daß der Effekt der Leistungsverflechtung auf Grund des "beschnittenen" Kovarianzschätzwertes vermieden wird.

Die Grundlage für die Extrapolation bildet die Forderung, daß der Schätzwert der Kovarianzmatrix positiv semidefinit sein soll, d.h. $\det \hat{C} \geq 0$, vgl. Abschnitt 4.3. Dann ist, ausgehend von $2M+1$ bekannten Schätzwerten

$\hat{c}_x(k)$ ¹⁾, $|k| \leq M$, die Determinante der Matrix²⁾

$$\hat{c}_{-M+2} = \begin{bmatrix} \hat{c}_x(0) & \hat{c}_x(1)' & \dots & \hat{c}_x(M) & \tilde{c}_x(M+1) \\ \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & \dots & \hat{c}_x(M-1) & \hat{c}_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{c}_x(M+1) & \hat{c}_x(M) & \dots & \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit von dem zu extrapolierenden Wert $\tilde{c}_x(M+1)$ eine quadratische Funktion mit einem einzigen Maximum, und es gibt einen "zulässigen" Bereich für $\tilde{c}_x(M+1)$, so daß $\det \hat{c}_{-M+2} \geq 0$ ist. Die entscheidende Idee von BURG besteht jetzt darin, aus diesem Bereich denjenigen Wert für $\tilde{c}_x(M+1)$ zu nehmen, der keine zusätzliche über die bereits in den bekannten Werten enthaltene Information hinaus mitschlingt. Das bedeutet im informationstheoretischen Sinne, daß die Entropie der durch $\hat{c}_{-M+2}$ charakterisierten Zufallsvariablen maximal wird. Im Abschnitt 4.3 ist gezeigt worden, daß die Entropie normalverteilter Zufallsvariablen proportional zum Logarithmus der Determinante der Kovarianzmatrix ist, Gl.(4.10). Daraus folgt, daß das Maximum der Entropie durch das Maximum von $\det \hat{c}_{-M+2}$ bestimmt wird, so daß der gesuchte Kovarianzwert $\tilde{c}_x(M+1)$ aus der Bedingung

$$\frac{d}{d\tilde{c}_x(M+1)} \det \hat{c}_{-M+2} = 0$$

gewonnen werden kann. Diese Forderung ist auf Grund der Symmetrie von $\hat{c}_{-M+2}$ erfüllt, wenn

$$\det \begin{bmatrix} \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & \hat{c}_x(1) & \dots & \hat{c}_x(M-1) \\ \hat{c}_x(2) & \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & \dots & \hat{c}_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{c}_x(M+1) & \hat{c}_x(M) & \hat{c}_x(M-1) & \dots & \hat{c}_x(1) \end{bmatrix} = 0 \quad (12.2)$$

ist /44, S.116/. Auf die Auswertung von Gl.(12.2) soll hier verzichtet werden, statt dessen wird im Punkt 12.1.4 eine Rekursionsformel zur Extrapolation der Kovarianzfolge angegeben.

Führt man diese Prozedur fort, so ergibt sich ein Schätzwert für $c_x(k)$, der im Intervall $-M \leq k \leq M$ mit den Meßwerten übereinstimmt, während für die

1) Der Schätzwert $\hat{c}_x(k)$ muß nicht identisch mit dem im Abschnitt 9.2 diskutierten positiv semidefiniten Schätzwert $\hat{c}_N(k)$ sein.

2) Der Index an $\hat{c}$ kennzeichnet die Dimension $(M+2) \times (M+2)$ der Matrix.

Werte außerhalb ein Minimum an zusätzlichen Annahmen getroffen worden ist. Insbesondere wird $\hat{c}_x(k)$ für $|k| > M$ weder Null gesetzt noch periodisch fortgeführt!

Im folgenden Punkt wird gezeigt, wie der auf diesem Prinzip begründete zugehörige ME-Schätzwert für die Leistungsdichte aussieht.

12.1.1 Gewinnung des ME-Schätzwertes

Dazu wird angenommen, daß die zur Verfügung stehenden Daten $x_N(n)$, $0 \leq n < N$, aus einer Musterfunktion des im Intervall $[-\lambda_g, \lambda_g]$ bandbegrenzten normalverteilten Prozesses $x(n, e)$ stammen. Wenn die Daten durch Abtastung einer kontinuierlichen Musterfunktion gewonnen werden, so wird die Erfüllung des Abtasttheorems vorausgesetzt.

Auf Grund der Aussagen im Abschnitt 4.3 ist die Entropiedichte des Prozesses $x(n, e)$ proportional zu

$$I = \int_{-\lambda_g}^{\lambda_g} \ln S_x(\lambda) d\lambda. \quad (12.3)$$

Damit erhält man den sogenannten ME-Schätzwert für die Leistungsdichte als Lösung einer Variationsaufgabe mit Nebenbedingungen in Integralform. Die Aufgabe besteht darin, diejenige Funktion $S_x(\lambda) = \hat{S}_x(\lambda)$ zu finden, für die das Integral (12.3) maximal wird unter der Bedingung, daß für die gemessenen Kovarianzschätzwerte die WIENER-KHINTCHINE-Beziehungen

$$\int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_x(\lambda) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda = \hat{c}_x(k), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (12.4)$$

erfüllt sind.

Dieses sogenannte isoperimetrische Problem kann mit der Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren gelöst werden / 15 /. Bezeichnet man diese mit p_k , so ergibt sich $\hat{S}_x(\lambda)$ als Lösung der EULER-LAGRANGESchen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(s, \dot{s}, \lambda)}{\partial s} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial f(s, \dot{s}, \lambda)}{\partial \dot{s}} = 0, \quad (12.5)$$

wobei die Abkürzungen

$$s \equiv \hat{S}_x(\lambda), \quad \dot{s} \equiv \frac{d}{d\lambda} \hat{S}_x(\lambda)$$

und

$$f(s, \hat{s}, \lambda) = \ln s + \sum_{k=-M}^M p_k s e^{j2\pi\lambda k}$$

für die erweiterte Grundfunktion verwendet werden. Da f unabhängig von $\hat{s}$ ist, führt Gl.(12.5) unmittelbar auf

$$\frac{1}{s} + \sum_{k=-M}^M p_k e^{j2\pi\lambda k} = 0 \quad ,$$

bzw.

$$\hat{S}_X(\lambda) = \frac{1}{-\sum_{k=-M}^M p_k e^{j2\pi\lambda k}} \quad . \quad (12.6)$$

Bevor auf die Bestimmung der LAGRANGESchen Multiplikatoren p_k eingegangen wird, soll kurz ein anderer Weg aufgezeigt werden, der ebenfalls auf das Ergebnis (12.6) führt.

Ersetzt man in Gl.(12.3) $S_X(\lambda)$ durch die WIENER-KHINTCHINE-Beziehung

$$S_X(\lambda) = \sum c_X(k) e^{-j2\pi\lambda k} \quad ,$$

so erhält man

$$I = \int_{-\lambda_g}^{\lambda_g} \ln \sum c_X(k) e^{-j2\pi\lambda k} d\lambda \quad .$$

Nimmt man nun an, daß $c_X(k)$ für $|k| \leq M$ durch die Meßwerte $\hat{c}_X(k)$ gegeben ist, so führt das ME-Prinzip für die Bestimmung der unbekannten Kovarianzwerte auf die Forderung

$$\frac{\partial I}{\partial c_X(k)} = 0 \quad \text{für} \quad |k| > M \quad . \quad (12.7)$$

Daraus folgt

$$\int_{-\lambda_g}^{\lambda_g} \frac{1}{\hat{S}_X(\lambda)} e^{-j2\pi\lambda k} d\lambda = 0 \quad \text{für} \quad |k| > M \quad , \quad (12.8)$$

wobei $\hat{S}_X(\lambda)$ die WIENER-KHINTCHINE-Transformierte der gemäß Gl.(12.2) extrapolierten Kovarianzfolge ist; vgl. dazu Punkt 12.1.4. Wird nun die linke Seite von Gl.(12.8) mit b_k bezeichnet, wobei $b_{-k} = b_k$ ist, weil $\hat{S}_X(\lambda)$ reell und gerade ist, so kann $1/\hat{S}_X(\lambda)$ als endliche FOURIER-Reihe

$$\frac{1}{\hat{S}_x(\lambda)} = \sum_{-M}^M b_k e^{j2\pi\lambda k} \quad (12.9)$$

dargestellt werden. Hieraus ergibt sich mit $b_k = -p_k$ unmittelbar das Ergebnis (12.6) der Variationsaufgabe.

Im Prinzip müßten jetzt die FOURIER-Koeffizienten b_k und damit die LAGRANGEschen Multiplikatoren p_k so bestimmt werden, daß der Schätzwert $\hat{S}_x(\lambda)$ mit den Meßwerten $\hat{c}_x(k)$ für $|k| \leq M$ verträglich ist, d.h. daß Gl.(12.4) erfüllt ist. Es wird sich jedoch zeigen, daß $\hat{S}_x(\lambda)$ zweckmäßiger durch andere Koeffizienten gekennzeichnet wird, die sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems ergeben.

Setzt man in Gl.(12.4) die Beziehung (12.9) ein, so erhält man

$$\hat{c}_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sum_{-M}^M b_m e^{j2\pi\lambda m}} e^{j2\pi\lambda k} d\lambda, \quad |k| \leq M,$$

und mit

$$e^{j2\pi\lambda} = z \quad \text{und} \quad d\lambda = \frac{1}{2\pi j} \frac{dz}{z}$$

ergibt sich daraus für $|k| \leq M$

$$\hat{c}_x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_M \frac{z^{k-1}}{\sum_{-M}^M b_m z^{-m}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1}}{D_M(z) D_M(1/z)} dz, \quad (12.10)$$

wobei die Integration in der z -Ebene längs des Einheitskreises in mathematisch positiver Richtung erfolgt. Die Darstellung der Summe als Produkt der Polynome

$$D_M(z) = \sum_0^M d_m z^{-m} \quad \text{und} \quad D_M(1/z) = \sum_0^M d_m z^m$$

ist wegen $b_{-m} = b_m$ grundsätzlich möglich (Spiegelpolynom), wobei die Nullstellen von $D_M(z)$ innerhalb und damit die von $D_M(1/z)$ außerhalb des Einheitskreises liegen. Damit läßt sich in Verbindung mit Gl.(12.9) der ME-Schätzwert in der Form

$$\hat{S}_x(\lambda) = \frac{1}{D_M(e^{j2\pi\lambda}) D_M(e^{-j2\pi\lambda})} = \frac{1}{\left| \sum_{m=0}^M d_m e^{-j2\pi\lambda m} \right|^2} \quad (12.11)$$

darstellen, wobei die Koeffizienten durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_x(0) & \hat{c}_x(1) & & \hat{c}_x(M) \\ \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & & \hat{c}_x(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_x(M) & \hat{c}_x(M-1) & \dots & \hat{c}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/d_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.12)$$

bestimmt werden.

Dieses Ergebnis erhält man, wenn mit Gl.(12.10) die Summe

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M d_m \hat{c}_x(k-m) &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1} \sum_{m=0}^M d_m z^{-m}}{D_M(z) D_M\left(\frac{1}{z}\right)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1}}{D_M\left(\frac{1}{z}\right)} dz \end{aligned}$$

für $0 \leq k \leq M$ gebildet und das Ringintegral mit Hilfe des Residuensatzes ausgewertet wird. Da der Integrand für $k \geq 1$ in und auf dem Einheitskreis analytisch ist und für $k = 0$ einen Pol bei $z = 0$ aufweist, ergibt sich

$$\sum_{m=0}^M d_m \hat{c}_x(k-m) = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 1, 2, \dots, M \\ 1/d_0 & \text{für } k = 0 \end{cases},$$

was nur eine andere Form von Gl.(12.12) darstellt.

Bei der Ableitung des ME-Schätzwertes, Gl.(12.11), sind zwei wesentliche Fragen offengeblieben, nämlich wie und bis zu welcher Ordnung M die bisher als gegeben betrachteten Kovarianzschätzwerte $\hat{c}_x(k)$ aus den Daten $x_N(n)$ bestimmt werden müssen. Auf diese Probleme wird in späteren Punkten eingegangen. Zuvor sollen die Zusammenhänge mit den AR-Schätzverfahren und der Linearen Prädiktion sowie verschiedene allgemeine Eigenschaften des ME-Schätzwertes diskutiert werden.

12.1.2 Zusammenhang mit dem AR-Schätzverfahren

Den Ausgangspunkt für die Konstruktion eines AR-Schätzwertes für die Leistungsdichte bildet die Annahme, daß der Prozeß $x(n,e)$, aus dem die Daten $x_N(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, stammen, durch das AR-Prozeßmodell

$$\tilde{x}(n,e) = -\sum_{m=1}^M a_m \tilde{x}(n-m,e) + w(n,e) \quad (12.13)$$

approximiert werden kann. I.a. wird diese Annahme willkürlich getroffen, es sei denn, daß gewisse a-priori-Information über die Entstehung der Meßdaten vorliegt. Auf das Problem der "richtigen" Modellwahl wird am Ende dieses Punktes eingegangen.

In Gl.(12.13) ist $w(n,e)$ ein diskreter "Weißer Prozeß" mit $\sigma_w^2 = S_0$, vgl. Abschnitt 7.1, und das Leistungsdichtespektrum läßt sich gemäß Gl.(7.8) in der Form

$$S_x(\lambda) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{m=1}^M a_m e^{-j2\pi\lambda m} \right|^2} \quad (12.14)$$

darstellen. Da die Ordnung M des unterlegten Prozesses i.a. nicht bekannt ist, erstreckt sich die Schätzung nicht nur auf σ_w^2 und die Koeffizienten a_m für $1 \leq m \leq M$, sondern auch auf M selbst. Auf die Bestimmung der Modellordnung wird im Punkt 12.1.10 eingegangen; für die folgenden Überlegungen wird davon ausgegangen, daß M bekannt sei.

Zunächst werden die sogenannten YULE-WALKER-Gleichungen abgeleitet, die einen Zusammenhang zwischen den Parametern und der Kovarianzfolge $c_x(k)$ des Modells darstellen und somit eine Grundlage für die Schätzung von σ_w^2 und den a_m bilden. Dazu multipliziert man Gl.(12.13) mit $\tilde{x}(n-k,e)$ für $1 \leq k \leq M$ und bildet den Erwartungswert. Das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} c_x(1) \\ c_x(2) \\ \vdots \\ c_x(M) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_x(0) & c_x(1) & \dots & c_x(M-1) \\ c_x(1) & c_x(0) & \dots & c_x(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x(M-1) & c_x(M-2) & \dots & c_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

sind die YULE-WALKER- (i.f. kurz YW) oder Normalgleichungen, die kompakt in der Form

$$\underline{C}_M + \underline{C}_M \underline{a} = \underline{0} \quad (12.16)$$

geschrieben werden können.

Aus den YW-Gleichungen kann der Koeffizientenvektor $\underline{a}$ bestimmt werden, wenn M Werte der Kovarianzfolge für $m \geq 0$ bekannt sind oder als Schätzwert vorliegen.

Um die Bestimmung von σ_w^2 in diese Überlegungen einzubeziehen, ist es sinnvoll, das Gleichungssystem (12.16) mit der Zeile

$$c_x(0) = \underline{c}_M^T \underline{a} + \sigma_w^2$$

zu erweitern, die sich aus Gl.(12.13) durch Multiplikation mit $\tilde{x}(n,e)$ und anschließender Erwartungswertbildung ergibt. Man erhält dann das erweiterte System

$$\begin{bmatrix} c_x(0) & \underline{c}_M^T \\ \underline{c}_M & \underline{c}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

das sich mit

$$\underline{g}^T = [1, a_1, \dots, a_M] \quad \text{und} \quad \underline{i}^T = [1, 0, \dots, 0]$$

in der Form

$$\underline{c}_{M+1} \underline{g} = \sigma_w^2 \underline{i} \quad (12.17)$$

schreiben läßt, wobei die Kovarianzmatrix jetzt die Ordnung $M+1$ besitzt.

Geht man nunmehr wie im voranstehenden Punkt von der Annahme aus, daß $2M+1$ Werte $\hat{c}_x(k)$ für $|k| \leq M$ bekannt sind, so können Schätzwerte für $\underline{a}$ und σ_w^2 aus dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_x(0) & \hat{c}_x(1) & \dots & \hat{c}_x(M) \\ \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & \dots & \hat{c}_x(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{c}_x(M) & \hat{c}_x(M-1) & \dots & \hat{c}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

berechnet werden. Der Vergleich mit der Bestimmungsgleichung (12.12) für die Koeffizienten des ME-Schätzwertes zeigt, daß folgende Zusammenhänge bestehen:

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{d_0^2}, \quad \hat{a}_m = \frac{d_m}{d_0}, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (12.18)$$

Daraus folgt, daß der gemäß Gl.(12.14) konstruierte AR-Schätzwert

$$\hat{S}_x(\lambda) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_m e^{-j2\pi\lambda m} \right|^2}$$

mit dem ME-Schätzwert nach Gl.(12.11) übereinstimmt, wenn in beiden Fällen von denselben aus $x_N(n)$ berechneten Kovarianzschätzwerten $\hat{c}_x(k)$, $|k| \leq M$, ausgegangen wird. Aus diesem Grund wird im folgenden die Bezeichnung ME/AR-Schätzwert verwendet.

Vor dem Hintergrund dieser Äquivalenz stellt sich natürlich die Frage, ob das AR-Modell eventuell eine Sonderstellung unter den rationalen Spektralmodellen einnimmt, wie dies auf Grund der scheinbar genialen Lösung des Spektralschätzproblems durch das ME-Prinzip vermutet werden könnte [13]. Untersuchungen von TREITEL u.a. [203,250], in denen jeweils aus den Daten eines bekannten AR-, MA- und ARMA-Prozesses Spektralschätzwerte auf der Grundlage dieser drei Modelle bestimmt worden sind, ergeben, daß dies nicht der Fall ist. Vielmehr zeigt sich, daß die Auswahl eines "korrekten" Modells, d.h. die Frage, ob ein AR-, oder ARMA-Prozeß für eine Spektralschätzung zugrundegelegt werden soll, ein gravierendes und bisher nur unbefriedigend gelöstes Problem darstellt.

Wenn keinerlei a-priori-Information über den Prozeß vorliegt, aus dem die Daten stammen, ist es möglich, anhand einer Pilotschätzung mit einem nichtparametrischen Verfahren zu prüfen, ob in dem Spektrum z.B. ausgeprägte Spitzen, aber weniger deutliche Einbrüche enthalten sind. Die Spitzen deuten auf Pole von $H(z)$, der Übertragungsfunktion des "erzeugenden" Formfilters, in der Nähe des Einheitskreises hin, so daß in diesem Fall ein AR-Modell geeignet erscheint. Wenn die Pilotschätzung jedoch ergibt, daß in dem Spektrum deutliche Einbrüche (Nullstellen-Verhalten) und keine ausgeprägten Spitzen enthalten sind, bietet sich ein MA-Modell als Grundlage für die parametrische Spektralschätzung an.

In vielen Fällen stellen ARMA-Modelle einen guten Kompromiß dar, sowohl was die Schätzung von AR- als auch von MA- Spektren angeht [250]. Die ARMA-Verfahren haben jedoch, wie bereits erwähnt worden ist, den Nachteil, daß die Bestimmung der Modellparameter im Gegensatz zu den ME/AR-Schätzwerten die Lösung nichtlinearer Gleichungen erfordert.

Die Sonderstellung des ME/AR-Schätzverfahrens ist demnach nicht in einer Überlegenheit des AR-Modells, sondern vielmehr in rechentechnischen Vorteilen bei der Parameterbestimmung begründet.

12.1.3 AR-Schätzung und Lineare Prädiktion

Im folgenden wird gezeigt, daß die Bestimmung der Parameter eines ME/AR-Schätzwertes bei vorgegebener Modellordnung gleichwertig ist zur Bestimmung der Impulsantwort eines WIENERSchen Prädiktionsfilters und des minimalen Vorhersagefehlers i.q.M.. Der Zusammenhang zwischen ME/AR-Schätzung und Linearer Prädiktion /280/ hat mehr als formale Bedeutung: Zum einen können verschiedene für die Lineare Prädiktion entwickelte Verfahren zur Berechnung der Filterkoeffizienten für die Spektralschätzung übernommen werden, zum anderen lassen sich auf der Grundlage des Prädiktionsfehlers Kriterien für die Schätzung der Modellordnung konstruieren.

Den Ausgangspunkt für die Betrachtungen bildet folgendes WIENER-Problem: Gesucht wird die Impulsantwort $h(n)$ der Länge M eines diskreten linearen und kausalen Filters, das aus den vergangenen Werten der Musterfolge

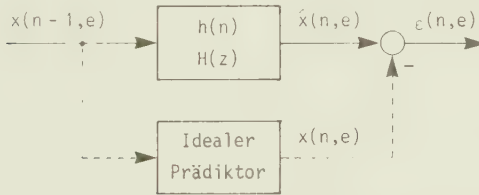


Bild 12.1

$x(1), 1 = \dots, n-2, n-1$, eines stationären stochastischen Prozesses einen Schätzwert für den Momentanwert $x(n)$ liefert, so daß der Schätzfehler i.q.M - im folgenden kurz als Prädiktionsfehler bezeichnet - minimal wird. Geht man zur Lösung dieses Problems von den im Bild 12.1 dargestellten Zusammenhängen aus, so folgt mit

$$\hat{x}(n, e) = \sum_{0}^{M-1} h(m) x(n-1-m, e)$$

aus dem Orthogonalitätsprinzip / 31 /

$$E\{e(n, e) x(i, e)\} = 0 \quad \text{für } i = n-M, \dots, n-2, n-1,$$

daß die optimale Impulsfolge $h^*(m)$ die Bedingung

$$E\left[x(n, e) - \sum_{0}^{M-1} h^*(m) x(n-1-m, e)\right] x(i, e) = 0, \quad i = n-M, \dots, n-2, n-1$$

erfüllen muß. Daraus folgt die diskrete WIENER-HOPF-Gleichung für den 1-Schritt-Prädiktor

$$\sum_0^{M-1} h^*(m) c_X(m-k) = c_X(k+1), \quad 0 \leq k \leq M-1,$$

die in Matrixschreibweise die Form

$$\begin{bmatrix} c_X(0) & c_X(1) & \dots & c_X(M-1) \\ c_X(1) & c_X(0) & \dots & c_X(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_X(M-1) & c_X(M-2) & \dots & c_X(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^*(0) \\ h^*(1) \\ \vdots \\ h^*(M-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_X(1) \\ c_X(2) \\ \vdots \\ c_X(M) \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

bzw.

$$\underline{C}_M \underline{h}^* = \underline{c}_M$$

annimmt. Die formale Lösung dieses WIENER-Filters ist demnach durch

$$\underline{h}^* = \underline{C}_M^{-1} \underline{c}_M$$

gegeben.

Setzt man in Gl.(12.19)

$$h^*(m-1) = -a_m \quad \text{für } 1 \leq m \leq M, \quad (12.20)$$

so erhält man die YW-Gleichungen (12.15), womit gezeigt ist, daß die Parameter eines AR-Modells durch dasselbe Gleichungssystem bestimmt sind, wie die Impulsantwort eines diskreten WIENER-Filters zur Vorhersage um 1 Schritt.

Das Minimum des Prädiktionsfehlers

$$P_M \equiv \sigma_{\epsilon \min}^2 = \mathcal{E} \epsilon^2(n, e) \quad \text{für } h(m) = h^*(m)$$

ergibt sich auf Grund des Orthogonalitätsprinzips zu

$$P_M = c_X(0) - \sum_0^{M-1} h^*(m) c_X(m+1),$$

bzw. mit Gl.(12.20) zu

$$P_M = c_X(0) + \sum_0^M a_m c_X(m).$$

Wird dieses Ergebnis mit Gl.(12.19) und (12.20) zusammengefaßt, so ergeben sich die erweiterten Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} c_x(0) & c_x(1) & \dots & c_x(M) \\ c_x(1) & c_x(0) & \dots & c_x(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_x(M) & c_x(M-1) & \dots & c_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12.21)$$

die für $P_M = \sigma_w^2$ identisch sind mit dem Gleichungssystem (12.17), durch das die Parameter $\underline{a}$ und σ_w^2 des AR-Prozeßmodells festgelegt werden.

An dieser Stelle soll auf eine Fehlinterpretation hingewiesen werden, die sich aus der aufgezeigten Äquivalenz zwischen Linearer Prädiktion und AR-Modellierung in gewisser Weise aufdrängt. In dem der Spektralschätzung zugrundeliegenden AR-Modell, Gl.(12.13), ist $w(n,e)$ ein "Weißer Prozeß", so daß man annehmen möchte, daß auch der Vorhersagefehler $\varepsilon(n,e)$ einen "Weißer Prozeß" bildet. Das ist natürlich i.a. nicht der Fall, denn Gl.(12.13) stellt lediglich ein mehr oder weniger willkürlich gewähltes Prozeßmodell $\tilde{x}(n,e)$ für den unterlegten Prozeß $x(n,e)$ dar, aus dem die Daten $x_N(n)$ stammen. Nur wenn dieser Prozeß tatsächlich einer Autoregression der Ordnung M genügt oder wenn M hinreichend groß ist, so daß $x(n,e)$ beliebig genau durch das AR-Modell approximiert wird / 22 /, ist auch $\varepsilon(n,e)$ ein "Weißer Prozeß" mit einem konstanten Leistungsdichtespektrum. Davon unberührt kann der Prozeß

$$\begin{aligned} \varepsilon(n,e) &= x(n,e) - \hat{x}(n,e) = x(n,e) + \sum_{m=1}^M a_m x(n-m,e) \\ &= \sum_{m=0}^M g_m x(n-m,e) \end{aligned}$$

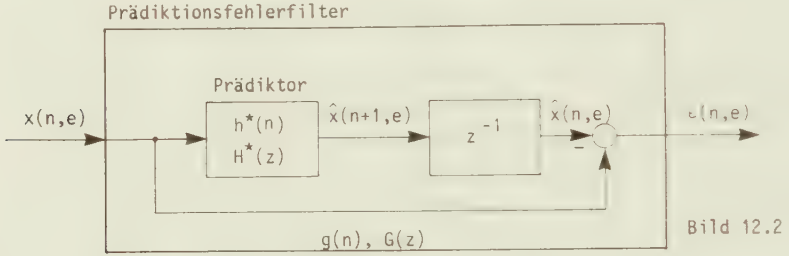
als Ergebnis einer Filterung des Prozesses $x(n,e)$ durch ein System mit der Impulsantwort

$$g(m) = \{g_m\} = \{1, a_1, a_2, \dots, a_M\}$$

interpretiert werden, vgl. die Vereinbarungen zu Gl.(12.17) im Falle der AR-Schätzung. Das durch die Impulsantwort $g(m)$ bzw. die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \sum_{m=0}^M g_m z^{-m} = 1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m} \quad (12.22)$$

charakterisierte Filter wird Prädiktionsfehlerfilter /192/ genannt. Im Bild 12.2 ist der Zusammenhang zwischen diesem Filter und dem WIENER-schen Vorhersagefilter dargestellt.



Wenn ein Schätzwert $\hat{g}(m)$ für die Impulsantwort des Prädiktionsfehlerfilters aus denselben Daten $x_N(n)$ bzw. denselben Kovarianzschätzwerten berechnet wird wie der ME/AR-Schätzwert, so ist das Prädiktionsfehlerfilter mit der Übertragungsfunktion

$$\hat{G}(z) = 1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_m z^{-m}$$

das inverse Filter zu dem "geschätzten" Formfilter mit

$$\hat{A}(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_m z^{-m}}$$

Im Zusammenhang mit der Berechnung der Modellparameter im Punkt 12.1.7 wird gezeigt, daß $\hat{G}(z)$ minimalphasig ist und damit das AR-Modell mit der Übertragungsfunktion $\hat{A}(z)$ stabil ist.

12.1.4 Die Kovarianzfunktion des ME/AR-Schätzwertes

Die entscheidende Idee bei der Einführung des ME-Schätzwertes besteht darin, die zunächst nur im Intervall $-M \leq k \leq M$ als bekannt (z.B. geschätzt) vorausgesetzte Kovarianzfunktion außerhalb dieses Intervalls nicht gleich Null zu setzen oder periodisch fortzuführen, sondern auf der Grundlage des ME-Prinzips zu extrapolieren. Die Frage ist: wie sieht die Kovarianzfunktion des ME/AR-Schätzwertes für $|k| > M$ aus?

In den einleitenden Bemerkungen zum Abschnitt 12.1 ist gezeigt worden, daß ausgehend von $2M+1$ gegebenen Schätzwerten $\hat{c}_x(k)$ $|k| \leq M$, der Wert $\tilde{c}_x(M+1)$ aus der Bedingung (12.2)

$$\det \begin{bmatrix} \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & \hat{c}_x(1) & \dots & \hat{c}_x(M-1) \\ \hat{c}_x(2) & \hat{c}_x(1) & \hat{c}_x(0) & \dots & \hat{c}_x(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_x(M+1) & \hat{c}_x(M) & \hat{c}_x(M-1) & \dots & \hat{c}_x(1) \end{bmatrix} = 0$$

gewonnen werden kann. Im folgenden wird eine Beziehung abgeleitet, mit der $\tilde{c}_x(k)$ für $|k| > M$ rekursiv berechnet werden kann.

Ausgehend von der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung zwischen ME/AR-Schätzwert und zugehöriger Kovarianzfolge

$$\int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_x(\lambda) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda = \tilde{c}_x(k), \quad (12.23)$$

kann $\tilde{c}_x(k)$ in Verbindung mit Gl.(12.11) mit Hilfe des Residuensatzes aus der Beziehung

$$\tilde{c}_x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{k-1}}{D_M(z) D_M(\frac{1}{z})} dz, \quad$$

berechnet werden. Aus Symmetriegründen genügt es, $\tilde{c}_x(k)$ für $k \geq 0$ als Summe der Residuen der Pole von $D_M(z)$ zu bestimmen, die innerhalb des Einheitskreises liegen:

$$\tilde{c}_x(k) = \sum_m \operatorname{Res} \left\{ \frac{z^{k-1}}{D_M(z) D_M(z^{-1})} \right\}_{z=z_{\text{om}}} \quad (k \geq 0).$$

Diese Folge kann als Impulsantwort eines fiktiven Systems mit der Übertragungsfunktion

$$\tilde{H}^+(z) = \frac{E(z)}{D_M(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M e_m z^{-m}}{\sum_{m=0}^M d_m z^{-m}}$$

gedeutet werden, wobei für das Zählerpolynom $E(z)$ nur von Bedeutung ist, daß es höchstens von der Ordnung M sein kann. Mit dem Einheitsimpuls

$$\gamma_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

ergibt sich $\tilde{c}_x(k)$ für $k \geq 0$ als Lösung der Differenzengleichung

$$\sum_{m=0}^M d_m \tilde{c}_x(k-m) = \sum_{m=0}^M e_m \gamma_0(k-m) .$$

Da die Lösung für $0 \leq k \leq M$ bekannt ist, nämlich $\tilde{c}_x(k) = \hat{c}_x(k)$, interessiert hier nur der Fall $k > M$. Dann ist aber die rechte Seite der Gleichung identisch Null, so daß sich die Rekursionsformel

$$\tilde{c}_x(k) = - \sum_{m=1}^M \frac{d_m}{d_0} \tilde{c}_x(k-m) = - \sum_{m=1}^M \hat{a}_m \tilde{c}_x(k-m) \quad (k > M) \quad (12.24)$$

ergibt. Die rechte Seite von Gl.(12.24) folgt dabei aus dem Zusammenhang (12.18).

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man von dem der AR-Schätzung zugrundeliegenden Modell (12.13) mit den geschätzten Parametern $\hat{a}_m$ $\hat{a}_m$ ausgeht:

$$x(n,e) = - \sum_{m=1}^M \hat{a}_m \tilde{x}(n-m,e) + w(n,e) .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\tilde{x}(n-k,e)$, $k > M$, und bildet den Erwartungswert, so ergibt sich unmittelbar die Rekursion (12.24), weil $\tilde{x}(n-k,e)$ für $k \neq 0$ statistisch unabhängig von dem "Weißen Prozeß" $w(n,e)$ ist.

Damit kann die Umkehrtransformation zu Gl.(12.23) in der Form

$$\hat{S}_X(\lambda) = \frac{\sum_{m=1}^M \hat{a}_m e^{-j2\pi\lambda m}}{1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_m e^{-j2\pi\lambda m}} = \sum_k \hat{c}_X(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

mit

$$\hat{c}_X(k) = \begin{cases} \hat{c}_X(k) & \text{für } |k| \leq M \\ -\sum_{m=1}^M \hat{a}_m \tilde{c}_X(|k| - m) & \text{für } |k| > M \end{cases}$$

dargestellt werden, aus der noch einmal deutlich wird, daß bei der Bildung des ME/AR-Schätzwertes keine Kovarianzgewichtung, sondern eine nach Unendlich gehende Extrapolation verwendet wird. Die Folge davon ist, daß die durch endliche Daten- und Kovarianzgewichtungen bedingten Leistungsverflechtungen auf Grund der Seitenmaxima in den Spektralfenstern vermieden werden. Gleichzeitig ist zu erwarten, daß die ME/AR-Schätzwerte speziell für kurze Datensätze $x_N(n)$ eine bessere Auflösung besitzen als vergleichbare BT-Schätzwerte. Das Problem der Auflösung wird im nächsten Punkt angesprochen.

12.1.5 Statistische Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte

Da die parametrischen Schätzwerte nicht unmittelbar durch eine Schätzfunktion

$$\hat{S}_N(\lambda) = \mathcal{F}_\lambda[x_N(n)] ,$$

sondern über den Umweg einer Modellbildung gewonnen werden, können die im Abschnitt 9.1 eingeführten Kriterien wie Erwartungstreue und Konsistenz zur Beurteilung der Güte dieser Schätzwerte nicht ohne weiteres herangezogen werden. Wenn nämlich der Schätzung ein "falsches" Modell zugrundegelegt wird, so geht zwar die Varianz des Schätzwertes

$$\text{var} \hat{S}_N(\lambda, e) = \mathcal{E}[\hat{S}_N(\lambda, e) - \mathcal{E} \hat{S}_N(\lambda, e)]^2$$

gegen Null, wenn die Parameter des Modells für $N \rightarrow \infty$ konsistent geschätzt werden können, aber gleichzeitig wird die Verschiebung

$$b\hat{S}_N(\lambda, e) = \mathcal{E} \hat{S}_N(\lambda, e) - S_X(\lambda)$$

auch im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ eine Funktion $b(\lambda)$ sein, die i.a. nicht oder nur für einzelne Frequenzen gleich Null ist. Demnach kann ein parametrischer Schätzwert überhaupt nur dann konsistent sein, wenn das verwendete Modell mit der Struktur des Prozesses $x(n,e)$, durch den die Daten $x_N(n)$ gebildet werden, "verträglich" ist.

Im Abschnitt 7.2 ist gezeigt worden, daß jedem beschränkten Dichtespektrum $S_X(\lambda)$ ein MA-Prozeß

$$x(n,e) = \sum_0 b_1 w(n-1,e)$$

zugeordnet werden kann. Darüberhinaus existiert ein äquivalenter AR-Prozeß mit derselben Leistungsdichte /213/, wenn

$$B(z) = \sum_0 b_1 z^{-1}$$

invertierbar ist, wobei sich wiederum zeigen läßt, daß diese beliebig genau durch ein endliches AR-Spektrum approximiert werden kann, wenn die Ordnung K hinreichend groß gewählt wird. Damit können die aufgezeigten Schwierigkeiten bezüglich der Beurteilung der statistischen Eigenschaften von ME/AR-Schätzwerten beseitigt werden, wenn man nicht nur die Datenlänge N , sondern auch die Ordnung K des AR-Modells gegen Unendlich gehen läßt. Mit diesem Konzept sind von KROMER /222/, AKAIKE /181/ und BERK /213/ die asymptotischen Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte untersucht worden.

Die Tatsache, daß man bei einem parametrischen Schätzwert endlicher Ordnung K und Datenlänge N keine Aussagen über die Varianz und den Verschiebungsfehler machen kann, wird vielfach als gravierender Mangel dargestellt. Beachtet man jedoch, daß bei den nichtparametrischen analogen wie digitalen Schätzverfahren brauchbare Aussagen über die statistischen Eigenschaften ebenfalls nur auf Grund von asymptotischen Näherungen angegeben werden können, so läßt sich feststellen, daß die Ergebnisse über die asymptotischen Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte von vergleichbarem Wert sind.

Die folgenden Aussagen stützen sich auf die Arbeit von BERK /213/, in der mit dem Konzept der stochastischen Konvergenz (vgl. Punkt 9.3.3) gearbeitet wird; die Beweise sind sehr aufwendig und werden deshalb nicht dargestellt. Es wird angenommen, daß die Daten $x_N(n)$ aus einer Musterfunktion eines MA-Prozesses

$$x(n,e) = \sum_0 b_1 w(n-1,e)$$

stammen, wobei $w(n,e)$ ein "Weißer Prozeß" mit $E w^2(n,e) = \sigma_w^2$ ist; wenn $w(n,e)$ nicht normalverteilt ist, muß zusätzlich $E w^4(n,e) < \infty$ gefordert werden. Außerdem gelte

$$B(z) = \sum_0 b_1 z^{-1} > 0 \quad \text{für} \quad |z| \geq 1,$$

so daß

$$\frac{1}{B(z)} = A(z) = 1 + \sum_1 a_k z^{-k}$$

existiert und das Dichtespektrum in den äquivalenten Formen

$$S_X(\lambda) = \sigma_w^2 \left| \sum_0 b_1 e^{-j2\pi\lambda l} \right|_z^2 = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_1 a_k e^{-j2\pi\lambda k} \right|_z^2},$$

dargestellt werden kann. Ausgehend von dem ME/AR-Schätzwert

$$\hat{S}_K(\lambda) = \frac{\hat{\sigma}_K^2}{\left| 1 + \sum_1^K \hat{a}_k e^{-j2\pi\lambda k} \right|_z^2} \quad (12.25)$$

und der Voraussetzung, daß die Modellordnung K so gewählt wird, daß für $N \rightarrow \infty$

$$K \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad K^3/N \rightarrow 0$$

sowie

$$\sqrt{N} (|a_{K+1}| + |a_{K+2}| + \dots) \rightarrow 0$$

gilt, wird gezeigt, daß die Zufallsvariablen

$$\sqrt{\frac{N}{K}} [\hat{S}_K(\lambda_i, e) - S_X(\lambda_i)] = \zeta(\lambda_i, e) \quad i = 1, 2, \dots, I$$

asymptotisch unabhängig voneinander und normalverteilt, die Mittelwerte Null und die Varianzen

$$\text{var } \zeta(\lambda_i, e) = \begin{cases} 4S_X^2(\lambda_i) & \text{für } \lambda_i = 0 \text{ bzw. } \frac{1}{2} \\ 2S_X^2(\lambda_i) & \text{für } 0 < \lambda_i < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (12.26)$$

sind. Dieses Ergebnis beinhaltet primär, daß die ME/AR-Schätzwerte asymptotisch erwartungstreu und konsistent sind, wobei

$$\text{var } \hat{S}_N(\lambda, e) \approx \begin{cases} \frac{4K}{N} S_X^2(\lambda) & \text{für } \lambda = 0 \text{ bzw. } \frac{1}{2} \\ \frac{2K}{N} S_X^2(\lambda) & \text{für } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (12.27)$$

gilt.

Diese Näherung stimmt formal mit der Varianzabschätzung eines BT-Schätzwertes, Gl.(11.28), auf der Grundlage einer Rechteckgewichtung ($k_V = 2$, vgl. Punkt 11.2.6) überein:

$$\text{var } \hat{S}_{BT}(\lambda, e) \approx \frac{2M}{N} S_X^2(\lambda) ,$$

wenn die Länge M der Kovarianzgewichtung gleich der Ordnung K des ME/AR-Schätzwertes gewählt wird.

Die Diskussion der nichtparametrischen Schätzverfahren hat gezeigt, daß die Varianz allein kein hinreichendes Kriterium für die Güte eines Spektralschätzwertes ist, sondern daß darüber hinaus die Auflösung eine entscheidende Rolle spielt. Bei den nichtparametrischen Schätzverfahren wird die Auflösung eines Schätzwertes durch die äquivalente Bandbreite β des verwendeten Spektralfensters gekennzeichnet, wobei die Gegenläufigkeit in den Anforderungen bezüglich Varianz und Auflösung in der Unschärferelation

$$\beta \text{ var } \hat{S}_N(\lambda, e) = \text{const.} \quad (\lambda = \text{const.})$$

zum Ausdruck kommt, vgl. Punkt 11.2.4.

Für die ME/AR-Schätzwerte läßt sich kein entsprechendes Maß für die Auflösung angeben, weil diese Schätzwerte, wie im voranstehenden Punkt gezeigt worden ist, auf einer unendlich ausgedehnten Kovarianzfunktion begründet sind. Um trotzdem Aussagen über die Auflösung von ME/AR-Schätzwerten machen zu können, soll auf ein schon wiederholt verwendetes Beispiel zurückgegriffen werden. Im Bild 12.3 ist ein AR-Schätzwert für das frequenznormierte Leistungsdichtespektrum

$$S_X(\lambda) = \frac{S_0/\Delta t}{(1 - \lambda/\lambda_0)^2 + 4D \lambda^2/\lambda_0^2} \quad (\lambda_0 = 0,1, D = 0,1)$$

zusammen mit dem Erwartungswert einer BT-Schätzung mit Rechteckgewichtung dargestellt /261/. Die Grundlage für die Schätzung bilden $N = 128$ Abtastwerte mit $\Delta t = 10$ ms aus einem kontinuierlichen Prozeß 2. Ordnung. Die Ordnung des AR-Modells ¹⁾ und damit die Länge der Kovarianzgewichtung für

1) Auf die Bestimmung der "optimalen" Modellordnung K wird im Punkt 12.1.7 eingegangen. In dem Beispiel ist K mit dem sogenannten FPE-Kriterium bestimmt worden.

den BT-Schätzwert mit vergleichbarer Varianz beträgt $K = M = 4$.

Aus der Abbildung ist zu entnehmen, daß die Auflösung der BT-Schätzung bei einer äquivalenten Bandbreite von

$$\beta = \frac{1}{2M} = \frac{1}{8}$$

nicht ausreichend ist, um die Resonanzüberhöhung erkennbar zu machen. Demgegenüber besitzt der ME/AR-Schätzwert bei vergleichbarer Varianz eine wesentlich bessere Auflösung, wie der Vergleich mit dem ebenfalls im Bild 12.3 dargestellten Originalspektrum $S_X(\lambda)$ deutlich macht. Ergänzend wäre zu bemerken, daß die Rechteckgewichtung von allen Kovarianzgewichten gleicher Länge noch die kleinste Bandbreite und damit die beste Auflösung besitzt. Allerdings besitzt das Spektralfenster ausgeprägte Nebenmaxima und der Schätzwert kann negativ werden (schraffierter Bereich im Bild 12.3). Die anhand des Beispiels gemachte Aussage, daß die Auflösung eines ME/AR-Schätzwertes deutlich besser ist als die eines vergleichbaren nichtparametrischen Schätzwertes kann, wie andere Untersuchungen gezeigt haben, ohne

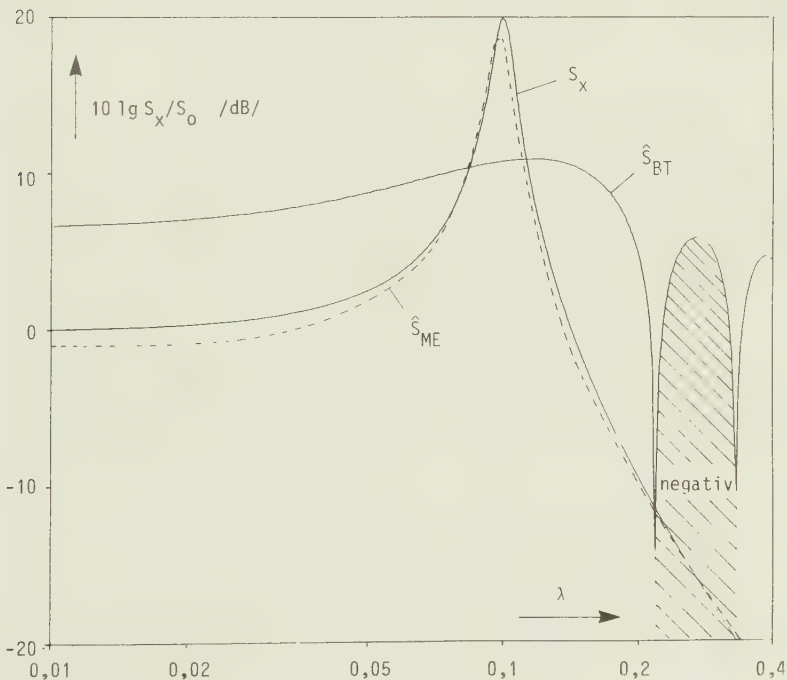


Bild 12.3

weiteres verallgemeinert werden. Hinzu kommt, daß die ME/AR-Schätzwerte bei "richtiger" Wahl der Modellordnung optimal glatt sind /206/. In Ermangelung einer Kenngröße wie der äquivalenten Bandbreite β wird im Zusammenhang mit parametrischen Schätzverfahren als Maß für die Auflösung der kleinste Abstand zweier benachbarter Spektrallinien verwendet, die in dem Schätzwert noch unterschieden werden, vgl. Punkt 10.5.2. Auf der Basis dieser Definition sind verschiedene Untersuchungen durchgeführt worden /246,258/, die ebenfalls ergeben haben, daß die Auflösung von ME/AR-Schätzwerten besser und i.a. sogar deutlich besser ist als die nichtparametrischer Schätzverfahren. Dabei hängt der Grad der Überlegenheit von verschiedenen Einflußgrößen ab, wie Datenlänge, Phasenlage der beiden harmonischen Signale, Lage der beiden Frequenzen im NYQUIST-Band und Signal- zu Rauschabstand. In den Leistungsdichtespektren stochastischer Prozesse treten keine Spektrallinien auf; aus diesem Grund wird auf diese Untersuchungen nicht näher eingegangen.

Weitere, mehr formale Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte ergeben sich aus den verwendeten Algorithmen zur Berechnung der Modellparameter. Auf diese Zusammenhänge wird in den nächsten Punkten eingegangen.

12.1.6 Grundlagen für die Schätzung der Modellparameter

Für die Bestimmung der Parameter des ME/AR-Schätzwertes wird wie im Falle der analogen und digitalen nichtparametrischen Schätzverfahren davon ausgegangen, daß nur ein endlicher Datensatz $x_N(n)$ der Länge N zur Verfügung steht. Wenn dieser durch Abtasten eines kontinuierlichen Signals $x_T(t)$, $0 \leq t \leq T$, gewonnen wird, so gilt $x_N(n) = x_T(n \cdot \Delta t)$, und es wird angenommen, daß dabei das Abtasttheorem erfüllt worden ist, vgl. Abschnitt 8.2. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, daß die Ordnung M des ME/AR-Schätzwertes - ggf. auf Grund einer zusätzlichen Schätzung, vgl. Punkt 12.1.10 - bekannt ist. Dann besteht, wie in den voranstehenden Punkten gezeigt worden ist, ein Zusammenhang zwischen den Parametern des Spektralschätzwertes

$$\hat{S}_x(\lambda) = \frac{\hat{p}_M}{\left| 1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_{M,m} e^{-j2\pi\lambda m} \right|^2} \quad (12.28)$$

und den Schätzwerten $\hat{c}_k \equiv \hat{c}_x(k)$, $0 \leq k \leq M$, für die Kovarianzfolge in Form der erweiterten YULE-WALKER- oder Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \dots & \hat{c}_M \\ \hat{c}_1 & \hat{c}_0 & \dots & \hat{c}_{M-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hat{c}_M & \hat{c}_{M-1} & \dots & \hat{c}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{M,1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{M,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.29)$$

Abweichend von den bisherigen Darstellungen sind in den Gln.(12.28) und (12.29) die AR-Parameter durch einen zusätzlichen Index gekennzeichnet, der die Ordnung des jeweiligen Modells angibt. Dies erfolgt im Hinblick auf die zu entwickelnden rekursiven Berechnungsformen für die Modellparameter.

Angesichts der in den bisherigen Betrachtungen deutlich gewordenen zentralen Bedeutung der YW-Gleichungen erscheint es eigentlich zwingend, die Parameter des Spektralschätzwertes (12.28) durch Lösen des Gleichungssystems (12.29) zu bestimmen. Es läßt sich jedoch zeigen, daß diese sogenannte YW-Methode nur ein - wenn auch bedeutender - Sonderfall der allgemeineren Lösungsverfahren auf der Grundlage der minimalen Fehlerquadrate darstellt.

Ein gravierender Nachteil der YW-Methode ist, daß von Schätzwerten $\hat{c}_x(k)$ für die Kovarianzfolge ausgegangen wird, wodurch wiederum implizit der Gebrauch von Datengewichtungen in der Schätzung der Leistungsdichte eingebracht wird, was zu Lasten der Auflösung und vor allem aber im Widerspruch zum ME-Prinzip steht, das den Ausgangspunkt für die Einführung der hier diskutierten Spektralschätzwerte bildet. BURG hat ein Verfahren zur Bestimmung der Parameter in dem Spektralschätzwert (12.28) entwickelt, durch das diese Schwierigkeiten umgangen werden, indem er nicht von einem Schätzwert für die Kovarianzfolge ausgeht, sondern unmittelbar von den Daten $x_N(n)$.

Dies ist ohnehin die üblichere Situation, von der bei der Schätzung der spektralen Leistungsdichte ausgegangen werden muß. Damit drängen sich natürlich Standardverfahren der Parameterschätzung wie z.B. die Maximum-Likelihood-Methode auf, vgl. Punkt 9.3.5. Ein grundsätzliches Problem des ML-Prinzips besteht darin, daß es in den meisten Fällen nicht oder nur mit extremem Aufwand möglich ist, einen exakten Schätzwert aus der Likelihood-Funktion zu gewinnen; dies gilt auch für die Schätzung der AR-Parameter / 7 /. Für große Datenlängen N und $N \gg M$ kann ein genäherter ML-Schätzwert für die Parameter von $S_x(\lambda)$ gefunden werden, der i.w. mit der Lösung der YW-Gln.(12.29) identisch ist /204/. Hieraus folgt auf Grund der bekannten asymptotischen Eigenschaften von ML-Schätzwerten, vgl. Punkt 9.3.5,

daß die YW-Methode für große Datenlängen N zufriedenstellende Ergebnisse liefert. Für kurze Datenlängen - und das ist eigentlich der wichtigere Einsatzbereich der ME/AR-Schätzwerte, weil hierbei die nichtparametrischen Schätzverfahren sehr schlechte Ergebnisse liefern - ist jedoch die YW-Methode anderen Verfahren auf der Grundlage der minimalen Fehlerquadrate unterlegen.

Die Bedeutung der YW-Methode ist vor allem darin zu sehen, daß in Verbindung mit dem zur Lösung verwendeten Algorithmus verschiedene Eigenschaften des Prädiktionsfehlerfilters und damit des ME/AR-Schätzwertes sichtbar werden, die später in Form von Randbedingungen in andere Verfahren zur Schätzung der Parameter eingebracht werden können. Aus diesem Grunde wird im folgenden Punkt zunächst die YW-Methode dargestellt.

12.1.7 Die YULE-WALKER-Methode

Zur Bestimmung von $\hat{a}_{M,m}$, $1 \leq m \leq M$, und $\hat{p}_M$ muß das Gleichungssystem (12.29), das in Matrixschreibweise die Form

$$\hat{c}_{M+1} \hat{g}_M = \hat{p}_M \hat{i} \quad (12.30)$$

annimmt, gelöst werden. Da die Kovarianzmatrix $\hat{c}_{M+1}$ eine TOEPLITZ-Struktur besitzt, vgl. Abschnitt 4.3, kann die Lösung mit Hilfe der LEVINSON-DURBIN-Rekursion /268,279/ durchgeführt werden. Dieser effiziente Algorithmus, der auch Bestandteil des Verfahrens von BURGE ist, benötigt grobenordnungsmäßig nur M^2 Operationen gegenüber M^3 des GAUSSschen Eliminationsverfahrens /280/. Für die Lösung des Gleichungssystems (12.30) werden nacheinander alle Parametersätze $[\hat{a}_{1,1}, \hat{p}_1]$, $[\hat{a}_{2,1}, \hat{a}_{2,2}, \hat{p}_2]$, ..., $[\hat{a}_{M,1}, \hat{a}_{M,2}, \dots, \hat{a}_{M,M}, \hat{p}_M]$ rekursiv auf Grund der Beziehungen

$$\Delta k = \hat{c}_x(k) + \sum_{m=1}^{k-1} \hat{a}_{k-1,m} \hat{c}_x(k-m), \quad (12.31)$$

$$\hat{a}_{k,k} = -\frac{\Delta k}{\hat{p}_{k-1}}, \quad (12.32)$$

$$\hat{a}_{k,m} = \hat{a}_{k-1,m} + \hat{a}_{k,k} \hat{a}_{k-1,k-m}, \quad 1 \leq m \leq k-1 \quad (12.33)$$

$$\hat{p}_k = (1 - \hat{a}_{k,k}^2) \hat{p}_{k-1} \quad (12.34)$$

und der Initialisierung

$$\hat{p}_0 = \hat{c}_x(0) \quad (12.35)$$

berechnet. Dabei ist für $k = 1$ zu beachten, daß die Summe in Gl.(12.31) Null ist.

Im Bild 12.4 ist ein Flußdiagramm zur Bestimmung eines ME/AR-Schätzwertes nach Gl.(12.28) dargestellt, wozu angemerkt werden soll, daß die eigentliche Berechnung von $\hat{S}_X(\lambda_1)$, $\lambda_1 = 1/L$ ($0 \leq l \leq L/2$), aus den Parametern $\hat{a}_{M,m}$ mit Hilfe der FFT durchgeführt werden kann.

Die Tatsache, daß bei der LEVINSON-DURBIN-Rekursion alle AR-Modelle mit Ordnung $1 \leq K \leq M$ aus den gegebenen Kovarianzschätzwerten berechnet werden, ist von großem Vorteil für die praktische Durchführung einer Spektralschätzung, weil die optimale Ordnung $M = M^*$ i.a. nicht vorab festliegt, sondern auf Grund bestimmter Kriterien im Verlauf der Rekursion ebenfalls geschätzt werden muß. Auf dieses Problem wird im Punkt 12.1.10 eingegangen.

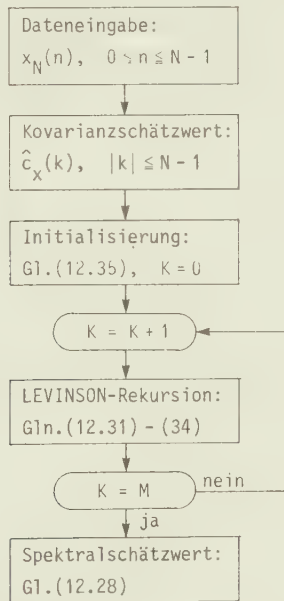


Bild 12.4

Im folgenden sollen verschiedene Eigenschaften des Prädiktionsfehlerfilters zusammengestellt werden, die sich unmittelbar aus der Rekursion ergeben und am Rande auf eine ungewöhnliche Kennzeichnung der statistischen Eigenschaften von stationären Prozessen führen. Mit der Abkürzung $\hat{\rho}_k \equiv \hat{a}_{k,k}$ für die sogenannten Reflexions- oder partiellen Korrelationskoeffizienten /280/

erhält man durch Eliminieren von Δ_k aus den Gln.(12.31) und (12.32)

$$\hat{c}_x(k) = -\hat{\rho}_k \hat{p}_{k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} \hat{a}_{k-1,i} \hat{c}_x(k-i) . \quad (12.36)$$

Daraus folgt in Verbindung mit den Gln.(12.33) und (12.34), daß bei Kenntnis von $\hat{p}_0 = \hat{c}_x(0)$ und der Reflexionskoeffizienten $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_M$ die Kovarianzfolge $\hat{c}_x(k)$ für $0 \leq k \leq M$ rekursiv bestimmt werden kann. Überträgt man dieses Ergebnis auf einen stationären GAUSSverteilten Prozeß $x(n,e)$, so heißt das nicht mehr und nicht weniger, als daß die statistischen Eigenschaften dieses Prozesses nicht nur durch die Kovarianzfolge $\hat{c}_x(k)$ oder das Leistungsdichtespektrum $S_x(\lambda)$ vollständig bestimmt sind, vgl. Abschnitt 4.3, sondern gleichwertig durch die Größen $\{\sigma_x^2, \rho_1, \rho_2, \dots\}$, wobei die LEVINSON-DURBIN-Rekursion mit $p_0 \equiv \sigma_x^2$ entsprechend gilt.

Wenn $\hat{c}_x(k)$ ein positiv semidefiniter Schätzwert für die Kovarianzfolge ist, d.h. für die gemäß Gl.(12.29) gebildete Kovarianzmatrix

$$\det \hat{C}_{-M+1} \geq 0 \quad (12.37)$$

gilt, vgl. Abschnitt 4.3, so ist

$$|\hat{\rho}_k| = |\hat{a}_{k,k}| \leq 1, \quad 1 \leq k \leq M; \quad (12.38)$$

die Umkehrung dieser Aussage gilt ebenfalls. Daraus folgt in Verbindung mit Gl.(12.34)

$$\hat{p}_k \leq \hat{p}_{k-1} . \quad (12.39)$$

Die Eigenschaft (12.38) der Reflexionskoeffizienten läßt sich mit Hilfe der sehr nützlichen Beziehung /222/

$$\hat{C}_{-M+1}^{-1} = \hat{L}_{-M+1}^T \hat{D}_{-M+1}^{-1} \hat{L}_{-M+1} \quad (12.40)$$

wobei

$$\hat{D}_{-M+1} = \text{Diag}(\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)$$

und

$$\hat{L}_{-M+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{a}_{1,1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hat{a}_{2,2} & \hat{a}_{2,1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{M,M} & \hat{a}_{M,M-1} & \dots & \hat{a}_{M,1} & 1 \end{bmatrix}$$

sind, sehr einfach beweisen. Beachtet man nämlich, daß $\det \underline{L}_{M+1} = \det \underline{L}_{M+1}^T = 1$ ist, so erhält man

$$\det \hat{\underline{C}}_{M+1}^{-1} = \prod_0^M \hat{\rho}_k^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \det \hat{\underline{C}}_{M+1} = \prod_0^M \hat{\rho}_k,$$

so daß die Bedingung (12.37) offenbar erfüllt ist, wenn

$$\hat{\rho}_k \geq 0, \quad 0 \leq k \leq M$$

gilt. Hieraus folgt wegen Gl.(12.34) unmittelbar die Aussage (12.38), weil $\hat{\rho}_0 = \hat{c}_x(0)$ grundsätzlich positiv ist.

Wenn im Laufe der Rekursion der Reflexionskoeffizient $|\rho_k| = 1$ wird, so ist der Prädiktionsfehler $\hat{\rho}_k = 0$ und die Rekursion kann abgebrochen werden. In diesem Fall stammen die Meßdaten aus einem rein deterministischen Prozeß, der aus harmonischen Komponenten besteht. Die Leistungsdichte eines solchen Prozesses ist ein Linienspektrum.

Aus der eben nachgewiesenen Eigenschaft (12.38) der Reflexionskoeffizienten folgt, daß das Prädiktionsfehlerfilter mit der Übertragungsfunktion

$$A_M(z) = \sum_0^M \hat{a}_{M,m} z^{-m} \quad (\hat{a}_{M,0} = 1)$$

minimalphasig bzw. das Allpolfilter mit

$$H(z) = \frac{1}{A_M(z)}$$

stabil ist, vgl. Abschnitt 7. Zum Beweis dieser Aussage wird $A_M(z)$ mit Gl.(12.33) aus der LEVINSON-Rekursion für $k = M$ in der Form

$$\begin{aligned} A_M(z) &= \sum_0^{M-1} \hat{a}_{M-1,m} z^{-m} + \hat{\rho}_M \sum_1^M \hat{a}_{M-1,M-m} z^{-m} \\ &= A_{M-1}(z) + \hat{\rho}_M z^{-M} \sum_1^M \hat{a}_{M-1,M-m} z^{-m}, \end{aligned}$$

geschrieben, wobei berücksichtigt worden ist, daß $\hat{a}_{M-1,M} = 0$ ist. Daraus ergibt sich mit der Substitution $M-m = k$

$$\begin{aligned} A_M(z) &= A_{M-1}(z) + \hat{\rho}_M z^{-M} \sum_0^{M-1} \hat{a}_{M-1,k} z^k \\ &= A_{M-1}(z) + \hat{\rho}_M z^{-M} A_{M-1}\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Nun gilt aber auf dem Einheitskreis für $|\hat{p}_M| < 1$ ¹⁾

$$|\hat{p}_M z^{-M} A_{M-1}(\frac{1}{z})| < |A_{M-1}(\frac{1}{z})| = |A_{M-1}(z)|,$$

so daß mit dem Satz von ROUCHÉ / 18/ gefolgert werden kann, daß $A_{M-1}(z)$ keine Nullstellen für $|z| > 1$ besitzt, d.h. minimalphasig ist, wenn $A_{M-1}(z)$ keine Nullstellen außerhalb des Einheitskreises hat. Dies folgt aber induktiv aus der Tatsache, daß $A_0(z) = 1$ überhaupt keine Nullstellen besitzt.

Der Zusammenhang zwischen der Definitheit des Kovarianzschätzwertes und der Stabilität des AR-Modells hat mehr als formale Bedeutung. Verwendet man nämlich für die YW-Lösung den nicht positiv semidefiniten Schätzwert

$$\hat{c}_2(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_0^{N-1-|k|} x(n) x(n+|k|) \quad , \quad (|k| \leq N-1)$$

so ist es möglich, daß sich Spektralschätzwerte mit sehr großer Streuung ergeben, obwohl die Abweichungen zwischen $\hat{c}_2(k)$ und dem positiv semidefiniten Schätzwert

$$\hat{c}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1-|k|} x(n) x(n+|k|)$$

scheinbar vernachlässigbar klein sind /196/. Der Grund für diesen Effekt kann demnach nur darin bestehen, daß die aus $\hat{c}_2(k)$ gebildete Kovarianzmatrix singulär werden kann.

Auf der Grundlage der sogenannten "Vorwärts- und Rückwärts"-Prädiktionsfehler, die weiter unten eingeführt werden, ist der ebenfalls positiv semidefinite und erwartungstreue Schätzwert

$$\hat{c}_3(k) = \frac{1}{2(N-M)} \left\{ \sum_{n=M}^{N-1} x(n) x(n-|k|) + x(n-M) x(n-M+|k|) \right\}$$

konstruiert worden /205/. Über seine Eigenschaften in Verbindung mit der YW-Methode liegen noch keine gesicherten Aussagen vor.

Die Forderung eines minimalphasigen Prädiktionsfehlerfilters und damit eines stabilen AR-Modells spielt auch in dem Verfahren von BURG, auf das im nächsten Punkt eingegangen wird, eine entscheidende Rolle. Zunächst soll jedoch, wiederum in Verbindung mit der LEVINSON-Rekursion, eine spezielle

1) Der Fall rein deterministischer Prozesse sei ausgeschlossen.

Struktur des Prädiktionsfehlerfilters abgeleitet werden, wobei von einer Aufspaltung des Vorhersagefehlers $\epsilon_M(n)$ ausgegangen wird, die zum ersten Mal von BURG angegeben worden ist.

Ausgehend von

$$\epsilon_M(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) + \sum_1^M \hat{a}_{M,m} x(n-m) \quad (12.41)$$

erhält man mit der Rekursionsbeziehung (12.33) und $\hat{a}_{M-1,M} = 0$

$$\begin{aligned} \epsilon_M(n) &= x(n) + \sum_1^{M-1} (\hat{a}_{M-1,m} + \hat{\rho}_M \hat{a}_{M-1,M-m}) x(n-m) + \hat{\rho}_M x(n-M) \\ &= \epsilon_{M-1}(n) + \hat{\rho}_M [x(n-M) + \sum_1^{M-1} \hat{a}_{M-1,M-m} x(n-m)] \end{aligned}$$

oder mit der Substitution $M-m = k$ in der Summe

$$\epsilon_M(n) = \epsilon_{M-1}(n) + \hat{\rho}_M [x(n-M) + \sum_1^{M-1} \hat{a}_{M-1,k} x(n-M+k)] \quad .$$

Definiert man nun

$$\eta_M(n) = x(n-M) + \sum_1^M \hat{a}_{M,m} x(n-M+m) \quad (12.42)$$

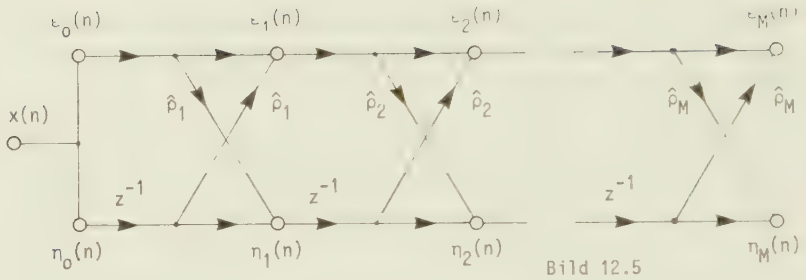
als sogenannten Rückwärts-Fehler bei der "Vorhersage" von $x(n-M)$ aus den Werten $x(n-M-1)$, $x(n-M-2)$, ..., $x(n)$, so kann der (Vorwärts-)Fehler $\epsilon_M(n)$ eines Prädiktionsfilters M -ter Ordnung in der Form

$$\epsilon_M(n) = \epsilon_{M-1}(n) + \hat{\rho}_M \eta_{M-1}(n-1) \quad (12.43)$$

geschrieben werden; entsprechend gilt

$$\eta_M(n) = \eta_{M-1}(n-1) + \hat{\rho}_M \epsilon_{M-1}(n) \quad . \quad (12.44)$$

Die beiden Gln.(12.43) und (12.44) führen auf die im Bild 12.5 als Signalgraph dargestellte Kreuzgliedstruktur (lattice structure) des Prädiktionsfehlerfilters mit der Übertragungsfunktion $A_M(z)$. Sie spielen eine wesentliche Rolle in dem nachfolgend dargestellten Verfahren von BURG, das als Sonderfall einer Klasse von rekursiven Schätzverfahren angesehen werden kann, die auf der Grundlage der Kreuzgliedstruktur von Bild 12.5 entwickelt worden sind /281/.



12.1.8 Das Verfahren von BURG

Der BURG-Algorithmus resultiert im wesentlichen aus zwei Forderungen: Erstens soll im Sinne des ME-Prinzips die in der YW-Methode durch die Verwendung von Kovarianzschätzwerten enthaltene Annahme einer Datengewichtung vermieden werden, und zweitens soll das geschätzte AR-Modell stabil sein. Dieses Ziel wird dadurch erreicht, daß die Kerngleichung (12.33)

$$\hat{a}_{k,m} = \hat{a}_{k-1,m} + \hat{\rho}_k \hat{a}_{k-1,m}, \quad 1 \leq m \leq k-1$$

der LEVINSON-DURBIN-Rekursion beibehalten wird und die Spiegelkoeffizienten $\hat{\rho}_k = \hat{a}_{k,k}$ unter der Randbedingung $|\hat{\rho}_k| \leq 1$ durch Minimieren des Mittelwerts aus geeignet definierten Schätzwerten für den Vorwärts- und Rückwärts-Prädiktionsfehler gewonnen werden. Entscheidend dabei ist, daß diese Schätzwerte

$$\hat{\epsilon}_{kv}^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} \epsilon_k^2(n) \quad \text{und} \quad \hat{\eta}_{kr}^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k}^{N-1} \eta_k^2(n)$$

mit $\epsilon_k(n)$ und $\eta_k(n)$ gemäß Gl.(12.41) und (12.42) so konstruiert sind, daß die Impulsantwort der Fehlerfilter nicht über die zur Verfügung stehenden Daten "hinausläuft" /184/, vgl. Bild 12.6 für den Fall $k = 3$.

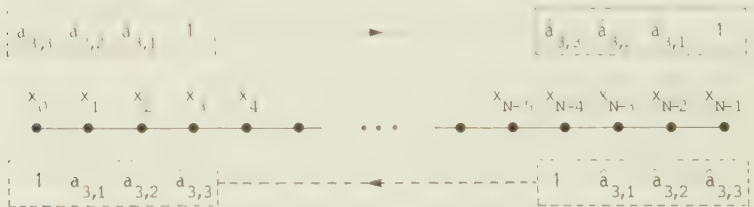


Bild 12.6

Setzt man in den Mittelwert

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{2}(\hat{p}_{kv} + \hat{p}_{kr}) = \frac{1}{2(N-k)} \sum_{n=k}^{N-1} [\epsilon_k^2(n) + \eta_k^2(n)] \quad (12.45)$$

die aus der LEVINSON-Rekursion abgeleiteten Beziehungen (12.43) und (12.44) ein, so ergibt sich

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{2(N-k)} \sum_{n=k}^{N-1} \{ [\epsilon_{k-1}(n) + \hat{p}_k \eta_{k-1}(n-1)]^2 + [\eta_{k-1}(n-1) + \hat{p}_k \epsilon_{k-1}(n)]^2 \}.$$

Da ϵ_{k-1} und η_{k-1} unabhängig von $\hat{p}_k$ sind und $\hat{Q}_k$ eine quadratische Funktion in $\hat{p}_k$ ist, führt die Bedingung $\partial \hat{Q}_k / \partial \hat{p}_k = 0$ auf das einzige Minimum für

$$\hat{p}_k = \frac{\sum_{n=k}^{N-1} \epsilon_{k-1}(n) \eta_{k-1}(n-1)}{\sum_{n=k}^{N-1} [\epsilon_{k-1}^2(n) + \eta_{k-1}^2(n-1)]}. \quad (12.46)$$

Aus der Form dieses Ergebnisses folgt unmittelbar, daß die Forderung $|\hat{p}_k| \leq 1$ immer erfüllt ist, so daß auf Grund der Aussagen im voranstehenden Punkt das zugrundeliegende Prädiktionsfehlerfilter minimalphasig bzw. das AR-Modell stabil ist. Es sei angemerkt, daß $|\hat{p}_k| > 1$ werden kann, wenn der Reflexionskoeffizient durch Minimieren des Vorwärts- oder Rückwärtsfehlers allein gewonnen wird /205/.

Damit kann, ausgehend von den Startwerten

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_N^2(n) \quad \epsilon_0(n) = \eta_0(n) = x(n)$$

der ME/AR-Schätzwert nach Gl.(12.28) wiederum rekursiv berechnet werden. Ein entsprechendes Flußdiagramm ist im Bild 12.7 dargestellt, woraus zu entnehmen ist, daß die Gln.(12.33) und (12.34) aus der LEVINSON-DURBIN-Rekursion auch in diesem Algorithmus enthalten sind, während die Berechnung der Spiegelkoeffizienten $\hat{p}_k$ jetzt mit Gl.(12.46) erfolgt.

Ausgehend von den Gln.(12.43) und (12.44) läßt sich für den Nenner von Gl.(12.46) ebenfalls eine rekursive Berechnungsvorschrift angeben, wodurch - ggf. zu Lasten von zusätzlichen Rundungsfehlern - eine Reduktion der Rechenzeit erreicht wird /182/.

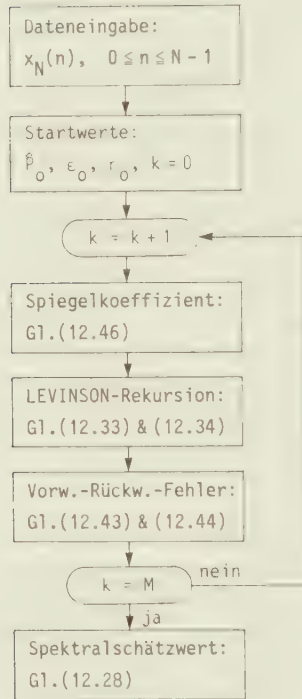


Bild 12.7

Der BURG-Algorithmus stellt ein effizientes Verfahren zur Schätzung der Parameter eines AR-Spektralmodells dar. Die in der Literatur erwähnten Nachteile dieser Methode, nämlich das "Aufspalten" einzelner Spektrallinien (spectral line splitting) und Verschiebungsfehler hinsichtlich der Frequenz, bei der die Linien auftreten sollten, betreffen ausschließlich die Schätzung von Spektren gemischt deterministisch-stochastischer Prozesse. Bei der Schätzung von kontinuierlichen Spektren rein stochastischer Prozesse sind vergleichbare Probleme nicht beobachtet worden. Der in Bild 12.3, S.241, dargestellte ME/AR-Schätzwert ist mit dem BURG-Algorithmus auf der Basis von $N = 128$ Abtastwerten berechnet worden. Die Rechenzeit ¹⁾ liegt mit weniger als 100 ms in der Größenordnung eines BT-Schätzwertes /260/.

1) Die Angaben beziehen sich auf Messungen an einer Rechenmaschine EAI 3200 ($\hat{=}$ GOULD 32/77) mit einfacher Genauigkeit.

12.1.9 Ein Verfahren auf Grund minimaler Fehlerquadrate

Die am Schluß des voranstehenden Punktes genannten Probleme des BURG-Algorithmus' bei der Schätzung von Spektren, die Linien enthalten, hat zur Entwicklung des im folgenden beschriebenen Verfahrens auf der Basis der minimalen Fehlerquadrate geführt /200,205/. Diese Methode zur Berechnung der AR-Parameter wird nach der englischen Bezeichnung "least-square-estimation" im folgenden LS-Verfahren genannt.

Die Grundlage bildet auch hier der von BURG eingeführte Prädiktionsfehler

$$\hat{Q}_M = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{n=M}^{N-1} [\epsilon_M^2(n) + \eta_M^2(n)] \quad (12.45)$$

als Mittelwert von Vor- und Rückwärtsfehler eines Prädiktors der Ordnung M. Allerdings wird nicht wie bei BURG nur der Spiegelkoeffizient $\hat{\rho}_M$ durch Minimieren von $\hat{Q}_M$ bestimmt, sondern dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate entsprechend alle Parameter $\hat{a}_{M,1}, \hat{a}_{M,2}, \dots, \hat{a}_{M,M} \equiv \hat{\rho}_M$. Es sind auch Ansätze gemacht worden, die nur von dem Vorwärts-Fehler $\hat{P}_{MV}$ ausgehen /244, 260/; sie führen aber i.a. auf weniger gute Ergebnisse als die hier dargestellte "Vorwärts-Rückwärts"-LS-Methode.

Setzt man in Gl.(12.45) die Definitionen (12.41) und (12.42) für ϵ_M und η_M ein, so ergibt sich mit $\hat{a}_{M,0} = 1$

$$\hat{Q}_M = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{n=M}^{N-1} \left\{ \left[\sum_{m=0}^M \hat{a}_{M,m} x(n-m) \right]^2 + \left[\sum_{m=0}^M \hat{a}_{M,m} x(n-M+m) \right]^2 \right\},$$

und da dies eine quadratische Funktion in den Koeffizienten $\hat{a}_{M,m}$ ist, führt die Bedingung

$$\frac{\partial \hat{Q}_M}{\partial \hat{a}_{M,m}} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq m \leq M$$

auf das einzige Minimum von $\hat{Q}_M$. Die optimalen Parameter werden durch das Gleichungssystem

$$\sum_{m=0}^M \hat{a}_{M,m} \sum_{n=M}^{N-1} [x(n-m) x(n-1) + x(n-M+m) x(n-M+1)] = 0, \quad 1 \leq l \leq M.$$

bestimmt. Definiert man für $0 \leq l, m \leq M$

$$\hat{r}_M(l, m) = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{n=M}^{N-1} [x(n-m) x(n-1) + x(n-M+m) x(n-M+1)], \quad (12.47)$$

wobei $\hat{r}_M(1,0) = \hat{c}_3(1)$ ein positiv semidefiniter und erwartungstreuer Schätzwert für die Kovarianzfolge ist (vgl. S.248), so lassen sich die Bestimmungsgleichungen für die $\hat{a}_{M,m}$ in der Form

$$\sum_{m=0}^M \hat{a}_{M,m} \hat{r}_M(1,m) = 0, \quad 1 \leq l \leq M, \quad (12.48)$$

darstellen, und für das Minimum von $\hat{Q}_M$ ergibt sich

$$\hat{Q}_{M\min} \equiv \hat{P}_M = \sum_0^M \hat{a}_{M,m} \hat{r}_M(0,m). \quad (12.49)$$

Faßt man die Gln.(12.48) und (12.49) in der Matrixgleichung

$$\hat{\underline{R}}_{M+1} \hat{\underline{g}}_M = \hat{\underline{P}}_M \hat{\underline{i}} \quad (12.50a)$$

oder ausführlich

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_M(0,0) & \hat{r}_M(0,1) & \dots & \hat{r}_M(0,M) \\ \hat{r}_M(1,0) & \hat{r}_M(1,1) & \dots & \hat{r}_M(1,M) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_M(M,0) & \hat{r}_M(M,1) & \dots & \hat{r}_M(M,M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{M,1} \\ \vdots \\ \hat{a}_{M,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12.50b)$$

zusammen, so erkennt man mit der unmittelbar aus Gl.(12.47) folgenden Eigenschaft $\hat{r}_M(1,m) = \hat{r}_M(m,1)$, daß die Matrix $\hat{\underline{R}}_{M+1}$ zwar symmetrisch ist, aber keine TOEPLITZ-Struktur besitzt. Damit ist die Verwendung der LEVINSON-DURBIN-Rekursion zur Bestimmung der Parameter $\hat{a}_{M,m}$ sowie $\hat{P}_M$ nicht möglich.

Man kann jedoch zeigen, daß sich die Matrix $\hat{\underline{R}}_{M+1}$ in einer Produkt-Summenform von TOEPLITZ- und HANKEL-Matrizen darstellen läßt,

$$\hat{\underline{R}}_{M+1} = \underline{\underline{I}}_M^T \underline{\underline{I}}_M + \underline{\underline{H}}_M^T \underline{\underline{H}}_M,$$

wobei mit der Abkürzung $x_n = x(n)$ die $(N-M) \times (M+1)$ -TOEPLITZ-Matrix $\underline{\underline{I}}_{M+1}$ durch

$$\underline{\underline{I}}_M = \begin{bmatrix} x_M & x_{M-1} & x_{M-2} & \dots & x_0 \\ x_{M+1} & x_M & x_{M-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \dots & x_{N-1-M} \end{bmatrix}$$

erklärt ist und die $(N-M) \times (M+1)$ -Matrix $\underline{\underline{H}}_M$ die Form

$$\underline{H}_M = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & & x_M \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_{M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{N-1-M} & x_{N-M} & x_{N-M+1} & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix}$$

besitzt. Dadurch ist es möglich, rekursive Algorithmen zur Lösung der Gl.(12.50) zu entwickeln, die wie die LEVINSON-Rekursion mit einer Anzahl von Operationen in der Größenordnung von M^2 auskommen /199,244,260/. Die ausführliche Beschreibung eines solchen Algorithmus' findet sich zusammen mit einem FORTRAN-Programm in /199/; auf die Wiedergabe des sehr komplexen Flußdiagramms soll hier verzichtet werden.

Vergleichende Messungen von stetigen Leistungsdichtespektren haben gezeigt, daß sich die Ergebnisse praktisch nicht von denen mit der BURG-Methode berechneten unterscheiden; auch die Rechenzeit liegt in der gleichen Größenordnung /260/.

Abschließend soll jedoch auf einen Unterschied zur YW- und BURG-Lösung hingewiesen werden. Der LS-Algorithmus garantiert keine stabilen AR-Modelle, d.h. es ist möglich, daß Nullstellen von

$$A_M(z) = 1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_{M,m} z^{-m}$$

außerhalb des Einheitskreises liegen. Für den Schätzwert

$$\hat{S}_x(\lambda) = \frac{\hat{P}_M}{|1 + \sum_{m=1}^M \hat{a}_{M,m} e^{-j2\pi\lambda m}|^2} = \frac{\hat{P}_M}{A(z) A(\frac{1}{z})} \bigg|_{z=e^{j2\pi\lambda}}$$

ist diese Tatsache jedoch unbedeutend, weil offensichtlich nur das Produkt $A(z) \cdot A(\frac{1}{z})$ entscheidend ist, in dem nicht mehr zwischen "stabilen" und "instabilen" Polen unterschieden wird.

12.1.10 Kriterien zur Festlegung der Modellordnung

Die Wahl der "richtigen" Modellordnung M hat großen Einfluß auf die Güte eines ME/AR-Schätzwertes.

Pauschal läßt sich feststellen, daß ein zu klein gewählter Wert von M auf einen zu glatten ME/AR-Schätzwert führt, wodurch die typische gute Auflösung dieser Schätzwerte verloren geht, vgl. Punkt 12.1.5, während bei einer zu hohen Modellordnung falsche Details in Form von Resonanzüberhöhungen in dem Spektrum vorgetäuscht werden.

Damit ist die Wahl der Modellordnung eines ME/AR-Schätzwertes vergleichbar mit dem Problem, die Länge M der Kovarianzgewichtung eines BT-Schätzwertes festzulegen: Auch hier führt ein zu kleiner Fensterkoeffizient M auf einen zu flachen Schätzwert für die Leistungsdichte, weil die äquivalente Bandbreite $\beta \sim 1/M$ zu groß ist, während große Werte von M zwar die Auflösung verbessern, aber gleichzeitig die Varianz der Schätzung erhöhen, wodurch ebenfalls unechte spektrale Details im Schätzwert auftreten.

Es erscheint naheliegend, das Problem anhand des Prädiktionsfehlers zu lösen, indem man die Modellordnung sukzessive erhöht, bis $\hat{P}_M$ ein Minimum erreicht. Leider führt diese Vorgehensweise nicht zum gewünschten Ziel, weil alle dargestellten Verfahren zur Bestimmung der Modellparameter sicherstellen, daß der Prädiktionsfehler mit wachsender Ordnung abnimmt. Dies ist primär eine Eigenschaft der verwendeten Algorithmen und nicht etwa ein Zeichen dafür, daß die Abweichung zwischen Schätzwert und "wahrem" Spektrum tatsächlich immer kleiner wird. Bei diesen Überlegungen bleibt nämlich unberücksichtigt, daß die Schätzung der Modellparameter und des Prädiktionsfehlers auf der Grundlage von N Daten mit steigender Modellordnung zunehmend schlechter, d.h. unzuverlässiger wird.

Auch die Verwendung sogenannter Anpassungstests /296/, wie z.B. der Test der Hypothese, daß der Vorhersagefehler $\varepsilon(n,e)$ des Linearen Prädiktors ein "Weißer Prozeß" ist,¹⁾ vgl. die Anmerkungen zu Gl.(12.21), bilden keine brauchbare Grundlage für die Festlegung der Ordnung eines ME/AR-Schätzwertes /211/. Die ersten konkreten Ansätze zur Lösung dieses Problems stammen von MALLOWS /223/ und DAVISSON /219,220/; allerdings wird die Brauchbarkeit dieser Vorschläge dadurch eingeschränkt, daß sie noch weitgehend subjektive Entscheidungskriterien beinhalten. Ähnliches gilt auch für einen

¹⁾ Dieser Test läßt sich mit Hilfe des Periodogramms durchführen; vgl. Abschnitt 9.3

Vorschlag von MARPLE /199/, nach dem die optimale Modellordnung anhand von vorgebbaren Schranken für die Differenz der Prädiktionsfehler in zwei aufeinanderfolgenden Rechenschritten bestimmt werden kann.

Das erste "objektive" Kriterium zur Festlegung der Ordnung eines ME/AR-Schätzwertes ist von AKAIKE /208,209/ angegeben worden. Grundlage dieses Kriteriums bildet eine Modifikation des Prädiktionsfehlers des diskreten WIENER-Filters zur Vorhersage um 1 Schritt, Punkt 12.1.3. Diese Modifikation besteht darin, zum Vorhersagefehler i.q.M. eine Art Strafterm zu addieren, durch den zum Ausdruck kommt, daß mit wachsendem M die Schätzung dieses Fehlers auf Grund der Fehlerfortpflanzung zunehmend schlechter wird. Der so erweiterte Prädiktionsfehler hat die Form

$$FPE(M) = \hat{\sigma}_E^2(M) + \frac{M}{N} \hat{\sigma}_E^2(M) \quad (12.51)$$

wobei FPE für "final prediction error" steht und der erwartungstreue Schätzwert

$$\hat{\sigma}_E^2(M) = \frac{N}{N-M} \hat{P}_M$$

anstelle des nur asymptotisch erwartungstreuen Schätzwertes $\hat{P}_M$ für die Varianz des Vorhersagefehlers verwendet wird /221/; verbindet man die beiden Gleichungen miteinander, so erhält man

$$FPE(M) = \hat{P}_M \frac{N+M}{N-M} . \quad (12.52)$$

Mit wachsendem M wird $\hat{P}_M$ kleiner, während der zweite Faktor ansteigt; als optimale Ordnung wird derjenige Wert $M = M^*$ angesehen, für den $FPE(M)$ ein Minimum annimmt. Zur Bestimmung von M^* wird in jedem Iterationsschritt zur Berechnung der Modellparameter gleichzeitig $FPE(M)$ berechnet und mit dem Wert $FPE(M-1)$ verglichen. Wenn $FPE(M) > FPE(M-1)$ ist, wird die Iteration abgebrochen und $M^* = M-1$ als optimale Modellordnung angesehen, vgl. Bild 12.8.

Wenn bei der Datenaufbereitung, vgl. die einführenden Bemerkungen zum 9. Kapitel, der lineare Mittelwert

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_N(n)$$

kompensiert worden ist, so geht dadurch ein weiterer Freiheitsgrad verloren, weil ein Parameter mehr geschätzt worden ist, und anstelle von

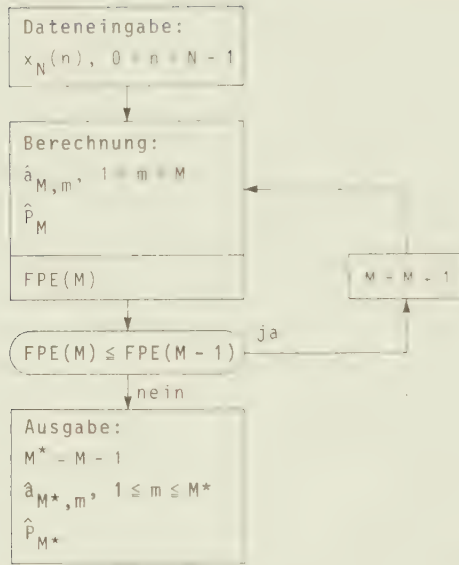


Bild 12.8

Gl.(12.52) muß mit der Form

$$FPE(M) = \frac{\hat{p}_M}{M} \frac{N+M+1}{N-M-1} \quad (12.53)$$

gearbeitet werden. Hierzu sei ergänzend bemerkt, daß die Bestimmung von $\hat{p}_M$ keinen zusätzlichen Freiheitsgrad erfordert, weil sich $\hat{p}_M$ aus den anderen geschätzten Parametern ergibt, vgl. Gl.(12.34).

Die Tragfähigkeit des FPE-Kriteriums ist sowohl mit experimentellen als auch mit "echten" Daten, z.B. aus dem Bereich der Geophysik /256/, nachgewiesen worden. Bei der Schätzung kontinuierlicher Leistungsdichtespektren, wie sie bei rein stochastischen Prozessen vorliegen, sind die Ergebnisse i.a. zufriedenstellend. Die teilweise weniger guten Erfahrungen mit diesem Kriterium beziehen sich auf die Schätzung von Mischspektren (Spektren von Prozessen mit harmonischen und stochastischen Anteilen, vgl. Punkt 4) und/oder sehr kurzen Datenlängen.

Abschließend sei auf eine von JONES /221/ vorgeschlagene Modifikation in Verbindung mit dem BURG-Algorithmus hingewiesen:

$$FPE_B(M) = \begin{cases} \hat{P}_M \frac{N+M+1}{N-M-1}, & \text{wenn } 0 < M \leq N/2 \\ \hat{P}_M \frac{N+M+1}{N-M-1} \cdot (3/2 - M/N), & N/2 < M < N-1. \end{cases}$$

Der verwendete Korrekturterm wird der Beobachtung gerecht, daß mit dem BURG-Algorithmus für $M > N/2$ ein zu kleiner Prädiktionsfehler geschätzt wird, wodurch das FPE-Kriterium nach Gl.(12.53) auf eine zu große Modellordnung führt.

Ausgehend von einem informationstheoretischen Kriterium für die Güte der Anpassung eines Modells, dem sogenannten KULLBACK-LEIBLER-Kriterium / 24 /, hat AKAIKE über eine Erweiterung des Maximum-Likelihood-Prinzips ein zweites Kriterium zur Bestimmung der Modellordnung vorgeschlagen /210,211/. Unter der zusätzlichen Annahme, daß der den Meßdaten unterlegte Prozeß GAUSS-verteilt ist, wird das sogenannte AIC-Kriterium in der Form

$$AIC(M) = \ln \hat{P}_M + 2 \frac{M+1}{N} \quad (12.54)$$

definiert, wobei AIC für "AKAIKE-information-criterion" steht. ¹⁾ Als optimale Modellordnung wird wiederum der Wert $M = M^*$ gewählt, für den AIC(M) minimal wird.

Ähnlich wie im Falle des FPE-Kriteriums, Gl.(12.51), kann der zweite Summand in Gl.(12.54) als "Strafterm" interpretiert werden, durch den die mit zunehmender Modellordnung größer werdende Unsicherheit bei der Schätzung der Parameter berücksichtigt wird. Wenn keine Mittelwertbereinigung der Daten durchgeführt worden ist, entfällt die 1 im zweiten Summanden.

Für $N \gg M$ sind FPE- und AIC- Kriterium äquivalent. Das folgt unmittelbar aus Gl.(12.53), die in der Form

$$\ln FPE(M) = \ln \hat{P}_M + \ln \left(1 + \frac{2M+2}{N-M-1} \right)$$

geschrieben werden kann, wenn der zweite Summand durch das lineare Glied einer TAYLOR-Entwicklung approximiert

$$\ln \left(1 + \frac{2M+2}{N-M-1} \right) \approx 2 \frac{M+1}{N-M-1}$$

1) Die Verbindung des Buchstabens A mit seinem Namen stammt nicht von AKAIKE selbst /211/

und $N-M-1 \approx N$ gesetzt wird:

$$\ln \text{FPE}(M) \approx \ln P_M + 2 \frac{M+1}{N} \equiv \text{AIC}(M).$$

Auf Grund dieser asymptotischen Äquivalenz ist zu erwarten, daß beide Kriterien für hinreichend lange Datensätze auf dieselbe optimale Modellordnung führen. Dies wird durch verschiedene Untersuchungen bestätigt, die darüber hinaus zeigen, daß auch das AIC-Kriterium bei der Schätzung von Mischspektren mit hohen Rauschanteilen i. a. eine zu niedrige Modellordnung liefert /256/. Abschließend sei noch bemerkt, daß das AIC-Kriterium auch in Verbindung mit ARMA-Modellen verwendet werden kann /206/.

Ein drittes Kriterium zur Festlegung der Modellordnung von ME/AR-Schätzwerten ist von PARZEN /224/ angegeben worden. Die Grundlage für dieses Kriterium bildet die Annahme, daß der den Daten unterlegte Prozeß $x(n,e)$ durch ein AR-Modell dargestellt werden kann, dessen Ordnung ggf. unendlich ist. Der Frequenzgang des zugehörigen Prädiktionsfehlerfilters sei

$$H_\infty(\lambda) = 1 + \sum_1 a_{\infty,m} e^{-j2\pi\lambda m},$$

und die Varianz des in diesem Falle "Weißen Prozesses" $\epsilon(n,e)$ werde mit σ_ϵ^2 bezeichnet, vgl. Punkt 12.1.3. Gesucht wird ein Schätzwert $H_M(\lambda)$ für $H_\infty(\lambda)$, so daß das Gütemaß

$$I_M = \mathcal{E} \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\hat{H}_M(\lambda, e) - H_\infty(\lambda)}{H_\infty(\lambda)} \right|^2 d\lambda$$

minimal wird. In Verbindung mit den asymptotischen Ergebnissen bezüglich der Parameter $\hat{a}_{M,m}$ von KROMER /222/, vgl. Punkt 12.1.5, läßt sich zeigen, daß die Näherung

$$I_M \approx 1 - \frac{\hat{\sigma}_\infty^2}{\sigma_\epsilon^2(M)} + \frac{M}{N}$$

gilt. Daraus ergibt sich das sogenannte CAT-Kriterium

$$\text{CAT}(M) = 1 - \frac{\hat{\sigma}_\infty^2}{\hat{\sigma}_\epsilon^2(M)} + \frac{M}{N},$$

wobei die Abkürzung CAT für "criterion autoregressiv transfer function" steht und

$$\hat{\sigma}_E^2(M) = \frac{N}{N-M} \hat{p}_M$$

der bereits im Zusammenhang mit dem FPE-Kriterium verwendete erwartungs-treue Schätzwert für die Varianz des Vorhersagefehlers ist. Der Schätzwert $\hat{\sigma}_\infty^2$ kann aus der für GAUSS-Prozesse gültigen Beziehung

$$\ln \sigma_\infty^2 = \ln 2\lambda_g + \frac{1}{2\lambda_g} \int_{-\lambda_g}^{\lambda_g} \ln S_x(\lambda) d\lambda$$

gewonnen werden /218/; vgl. Gl.(4.9) und die Folgerungen aus Gl.(12.40). Dieser Weg soll hier nicht weiterverfolgt werden, weil PARZEN in einem späteren Beitrag /225/ eine "verbesserte" Version dieses Kriteriums angegeben hat, die auf der Forderung

$$\sigma_\infty^2 - \sigma_E^2(M) = \text{Min}(M)$$

aufbaut. Aus einem Schätzwert für die Differenz $\sigma_\infty^2 - \sigma_E^2(M)$ wird die heute gebräuchliche Form des CAT-Kriteriums gewonnen:

$$\text{CAT}(M) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{N-m}{N \hat{p}_m} - \frac{N-M}{N \hat{p}_M} . \quad (12.55)$$

In der wiederholt zitierten Arbeit von LANDERS und LACOSS /256/ wird auch dieses Kriterium anhand von synthetischen und geophysikalischen Daten untersucht, wobei sich zeigt, daß es ähnliche Eigenschaften wie das AIC-Kriterium aufweist.

Damit stehen z.Zt. drei vergleichbare Kriterien zur Festlegung der Ordnung von ME/AR-Spektralschätzwerten zur Verfügung. Die Frage, welchem der drei der Vorzug zu geben ist, läßt sich ohne weitere Untersuchungen speziell im Zusammenhang mit der Schätzung von Mischspektren nicht beantworten. Für das hier primär diskutierte Problem der Schätzung von kontinuierlichen Leistungsdichtespektren rein stochastischer Prozesse liefern alle drei Kriterien zufriedenstellende Ergebnisse, wobei ggf. ergänzende Berechnungen von $\hat{S}_x(\lambda, M)$ für $M < M^*$ und $M > M^*$ zusätzliche Einsichten in die spektralen Eigenschaften des untersuchten Prozesses $x(n, e)$ vermitteln können. Mit diesen Bemerkungen soll die Diskussion der ME/AR-Schätzwerte abgeschlossen sein. In den folgenden Abschnitten wird auf das sogenannte Maximum-

Likelihood-Verfahren von CAPON sowie auf einige Fragen im Zusammenhang mit MA- und ARMA- Modellen als Grundlage für die Schätzung der spektralen Leistungsdichte eingegangen.

12.2 Der sogenannte Maximum-Likelihood-Schätzwert von CAPON

Im folgenden wird ein parametrisches Schätzverfahren dargestellt, das sehr eng mit den ME/AR-Schätzwerten verbunden ist, obgleich zunächst weder auf Grund der Ableitung noch anhand der Form des Schätzwertes ein Zusammenhang zu erkennen ist. Das Verfahren stammt aus dem Bereich der Geophysik und ist von J. CAPON /239/ für die Schätzung von Wellenzahlspektren entwickelt worden, wobei die Ortsabhängigkeit durch die Messung in Sensorfeldern erreicht wird. Der von CAPON angegebene Schätzwert für ein solches Wellenzahlspektrum kann als Ausgangsleistung eines Filters interpretiert werden, das auf der Grundlage des Maximum-Likelihood-Prinzips entworfen wird, um Schätzwerte für die von additivem Rauschen überlagerten Nutzsignale in den einzelnen Sensoren zu erhalten. Vor diesem Hintergrund hat LACOSS /254/ die Bezeichnung ML-Schätzwert auch für den Fall der gewöhnlichen Leistungsdichteschätzung von Zeitprozessen eingeführt. Diese Bezeichnung hat sich in der Literatur durchgesetzt und wird auch im folgenden verwendet, obgleich sich der Schätzwert, wie von CAPON selbst gezeigt worden ist, auch als Ergebnis einer erwartungstreuen Schätzung minimaler Varianz ergibt.

12.2.1 Begründung des Schätzverfahrens

Der ML-Schätzwert von CAPON kann im eindimensionalen Fall in der Form

$$S_x(\lambda) = \frac{M}{\underline{\varepsilon}_\lambda^T \hat{C}_M^{-1} \underline{\varepsilon}_\lambda} \quad (12.56)$$

dargestellt werden /254/, wobei $\hat{C}_M$ ein Schätzwert für die Kovarianzmatrix des unterlegten Prozesses $x(n,e)$ und

$$\underline{\varepsilon}_\lambda = [1, e^{j2\pi\lambda}, e^{j4\pi\lambda}, \dots, e^{2(M-1)\pi\lambda}]$$

ist. Hier wird abweichend von den üblichen Darstellungen, z.B. /254/ und /50/, der Faktor M im Zähler eingeführt, dessen Sinnfälligkeit später auf Grund des Zusammenhangs mit der ME/AR-Schätzung sichtbar wird.

Zunächst soll anhand einer heuristischen Betrachtung gezeigt werden, warum diese ungewöhnliche Form als ein Schätzwert für die Leistungsdichte angesehen werden kann.

Die Grundlage für den "Beweis" bildet ein lineares realisierbares Filter mit einer endlichen Impulsantwort $h(n)$, die so bestimmt werden soll, daß der Frequenzgang des Filters bei der jeweiligen Analysierfrequenz λ gleich 1 ist, so daß diese Frequenzkomponente unverfälscht durchgelassen wird, während die anderen Spektralanteile in einer optimalen Weise herausgefiltert werden.

Um diese Forderungen analytisch fassen zu können, wird als Eingangsprozeß des Filters

$$y(n,e) = s(n) + x(n,e) = s_0 e^{j2\pi\lambda n} + x(n,e)$$

angenommen, wobei $x(n,e)$ ein mittelwertfreier stochastischer Prozeß ist und das deterministische Signal $s(n)$ nur vorübergehend, nämlich im Hinblick auf die erste Forderung, benötigt wird.¹⁾ Betrachtet man dazu den Ausgangsprozeß

$$\hat{s}(n,e) = \sum_0^M h(m) y(n-m,e)$$

als erwartungstreuen Schätzwert für den deterministischen Anteil $s(n)$, so folgt aus

$$\mathcal{E}\hat{s}(n,e) = s_0 e^{j2\pi\lambda n} = \sum_0^{M-1} h(m) [s_0 e^{j2\pi\lambda(n-m)} + x(n-m,e)]$$

wegen $\mathcal{E}x(n,e) = 0$ die Bedingung

$$\sum_0^{M-1} h(m) e^{-j2\pi\lambda m} = H(e^{j2\pi\lambda}) = 1.$$

Mit der Vektorschreibweise für die Impulsantwort

$$\underline{h}^T = [h_0, h_1, \dots, h_{M-1}]$$

1) Die Verwendung der harmonischen Exponentiellen anstelle eines reellen Signals ist im Hinblick auf eine einfache analytische Darstellung zweckmäßig, obwohl dadurch mit komplexwertigen Impulsantworten gearbeitet werden muß.

kann diese Bedingung in der Form

$$1 - \underline{h}^T \underline{\bar{\epsilon}}_{\lambda} = 1 - \underline{\bar{\epsilon}}_{\lambda}^T \underline{h} = 0 \quad (12.57)$$

geschrieben werden. Gl.(12.57) stellt eine Nebenbedingung für die folgende Optimierungsaufgabe dar. Um nämlich die zweite Forderung zu erfüllen, soll die Impulsantwort so bestimmt werden, daß die Varianz

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{s}(n, e) &= \mathcal{E} |\hat{s}(n, e) - \mathcal{E} \hat{s}(n, e)|^2 = \mathcal{E} \left| \sum_{m=0}^{M-1} h(m) x(n-m, e) \right|^2 \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} \bar{h}(l) h(m) c_X(m-l) = \underline{\bar{h}}^T \underline{C}_M \underline{h} \end{aligned} \quad (12.58)$$

minimal wird. Dieses Problem kann mit Hilfe eines LAGRANGESchen Multiplikators κ gelöst werden, indem nicht $\text{var } \hat{s}(n, e)$ sondern das Gütemaß

$$J = \text{var } \hat{s}(n, e) + \kappa (1 - \underline{h}^T \underline{\bar{\epsilon}}_{\lambda}) = \underline{\bar{h}}^T \underline{C}_M \underline{h} + \kappa (1 - \underline{h}^T \underline{\bar{\epsilon}}_{\lambda})$$

minimiert wird. Das einzige Minimum dieses Funktionals wird durch die Bedingungen

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{h}} = \underline{0}, \quad \frac{\partial J}{\partial \underline{\bar{h}}} = \underline{0}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial J}{\partial \kappa} = 0$$

bestimmt, wobei die letzte mit der Nebenbedingung (12.57) identisch ist. Die beiden anderen Forderungen führen mit den Regeln für die Differentiation nach einem Vektor / 44 / auf

$$2 \underline{C}_M \underline{h}^* - \kappa \underline{\epsilon}_{\lambda} = \underline{0} \quad \text{bzw.} \quad \underline{h}^* = -\frac{\kappa}{2} \underline{C}_M^{-1} \underline{\epsilon}_{\lambda}.$$

Multipliziert man die rechte Gleichung mit $\underline{\epsilon}_{\lambda}^T$, so erhält man in Verbindung mit der Nebenbedingung (12.57) für den LAGRANGESchen Multiplikator

$$\kappa = \frac{-2}{\underline{\epsilon}_{\lambda}^T \underline{C}_M^{-1} \underline{\epsilon}_{\lambda}}$$

und damit für die optimale Impulsantwort

$$\underline{h}^* = \frac{\underline{C}_M^{-1} \underline{\epsilon}_{\lambda}}{\underline{\epsilon}_{\lambda}^T \underline{C}_M^{-1} \underline{\epsilon}_{\lambda}}.$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Matrixform (12.58) für die Varianz von $\hat{s}(n,e)$ ein, so ergibt sich für das Minimum

$$\text{var } \hat{s}(n,e) = \frac{1}{\underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}^T \underline{\underline{C}}_M^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}} = \frac{1}{\underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}^T \underline{\underline{C}}_M^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}},$$

und der Vergleich mit Gl.(12.56) zeigt, daß der ML-Schätzwert bei der Frequenz λ offenbar ein Schätzwert für die auf $\beta = 1/M$ bezogene Ausgangsleistung $q = \text{var } \hat{s}(n,e)$ des Optimalfilters für diese Frequenz ist. Da aber der Entwurf des Filters so durchgeführt worden ist, daß die Ausgangsleistung im wesentlichen von Spektralanteilen aus der Umgebung von λ gebildet wird, das Filter also Schmalbandcharakter besitzt, kann $\hat{S}_X(\lambda) = \hat{q}/\beta$ tatsächlich als Schätzwert für die spektrale Leistungsdichte angesehen werden. Dazu sei angemerkt, daß β hier nicht im strengen Sinn als Bandbreite des Schmalbandfilters angesehen werden kann; die Wahl $\beta = 1/M$ muß vielmehr im Hinblick auf die Konsistenz der Schätzung getroffen werden. Auf diese Frage wird im nächsten Punkt eingegangen.

Dieses Schätzverfahren entspricht damit in gewisser Weise dem analogen Suchfilterverfahren, vgl. Abschnitt 10.1, und der BT-Schätzung als äquivalente digitale Variante, vgl. Kapitel 11. Der wesentliche Unterschied zu diesen Verfahren besteht jedoch darin, daß die Filtercharakteristik, d.h. vor allem die Auflösung des ML-Schätzwertes i.a. für jede Frequenz verschieden ist und sich abhängig von den Meßdaten so einstellt, daß in optimaler Weise nur die Spektralkomponenten in der Umgebung der jeweiligen Analysierfrequenz λ einen Beitrag zur Ausgangsleistung und damit zum Schätzwert $\hat{S}_X(\lambda)$ liefern. In diesem Sinne ist der ML-Schätzwert nach Gl.(12.56) "datenabhängig", vgl. Abschnitt 9.4.

Wie bei allen parametrischen Schätzverfahren ist es nicht ohne weiteres möglich, quantitative Aussagen über die Auflösung des Schätzwertes zu machen. Meßtechnische Untersuchungen anhand von Linien- und Schmalbandspektren haben jedoch ergeben, daß die Auflösung des ML-Schätzwertes besser als die von BT-Schätzwerten aber i.a. schlechter als die von ME/AR-Schätzwerten ist /254/. Dafür ist die Varianz des ML-Schätzwertes kleiner als die eines vergleichbaren ME/AR-Schätzwertes.

Die letzten beiden Aussagen sind unmittelbare Folgerungen aus dem im nächsten Punkt aufgezeigten Zusammenhang zwischen ML- und ME/AR-Schätzung.

12.2.2 Zusammenhang mit den ME/AR-Schätzwerten

Der Zusammenhang zwischen dem ML-Schätzwert

$$\hat{S}_{ML}(\lambda) = \frac{M}{\underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}^T \underline{\underline{C}}_M^{-1} \underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}} \quad (12.56)$$

und dem aus den selben Daten bestimmten ME/AR-Schätzwert

$$\hat{S}_{AR}(\lambda; M-1) = \frac{\hat{p}_{M-1}}{\sum_{i=0}^{M-1} \hat{a}_{M-1,i} e^{-j2\lambda\pi i}} \quad (\hat{a}_{M-1,0} = 1)$$

wird deutlich, wenn man in Gl.(12.56) die Inverse der Kovarianzmatrix durch die Beziehung (12.40)

$$\hat{\underline{\underline{C}}}_M^{-1} = \underline{\underline{L}}_M^T \underline{\underline{D}}_M^{-1} \underline{\underline{L}}_M$$

ersetzt. Dabei ist, wie im Punkt 12.1.7 vereinbart wurde,

$$\underline{\underline{L}}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{a}_{1,1} & 1 & \dots & 0 \\ \hat{a}_{2,2} & \hat{a}_{2,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{M-1,M-1} & \hat{a}_{M-1,M-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

eine Dreiecksmatrix mit den Koeffizienten der Prädiktionsfehlerfilter bis zur Ordnung M-1 und

$$\underline{\underline{D}}_M = \text{Diag}(\hat{p}_0, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{M-1})$$

eine Diagonalmatrix mit den zugehörigen Prädiktionsteilern. Damit erhält man für den Kehrwert von $\hat{S}_{ML}(\lambda)$

$$\frac{1}{\hat{S}_{ML}(\lambda)} = \frac{1}{M} \underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}^T \underline{\underline{L}}_M^T \underline{\underline{D}}_M^{-1} \underline{\underline{L}}_M \underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda}$$

und mit

$$\underline{\underline{L}}_M \underline{\underline{\epsilon}}_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_{1,1} + e^{-j2\pi\lambda} \\ \hat{a}_{2,2} + \hat{a}_{2,1} e^{-j2\pi\lambda} + e^{-j2\pi\lambda} \\ \vdots \\ \hat{a}_{M-1,M-1} + \hat{a}_{M-1,M-2} e^{-j2\pi\lambda} + \dots + e^{-j2(M-1)\pi\lambda} \end{bmatrix}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{S}_{ML}(\lambda)} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{p}_m^{-1} \left| \sum_{l=0}^m \hat{a}_{m,l} e^{-j2\pi\lambda(l-m)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{p}_m^{-1} \left| \sum_{l=0}^m \hat{a}_{m,l} \right|^2 e^{-j2\pi\lambda l} \quad (\hat{a}_{m,0} = 1) .\end{aligned}$$

Beachtet man, daß unter der äußeren Summe gerade der Kehrwert eines ME/AR-Schätzwertes der Ordnung m steht, so erhält man

$$\frac{1}{\hat{S}_{ML}(\lambda)} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{1}{\hat{S}_{AR}(\lambda, m)} . \quad (12.59)$$

Auf Grund dieses Zusammenhanges kann der ML-Schätzwert als Ergebnis einer Art "Parallelschaltung" von ME/AR-Schätzwerten der Ordnung Null bis $M-1$ entstanden gedacht werden. Dieses Modell erklärt auch die Beobachtung, daß die Auflösung des ML-Schätzwertes schlechter ist als die des entsprechenden ME/AR-Schätzwertes, während die Varianz der ML-Schätzung geringer ist. Hier zeigt sich wiederum die schon bei den nichtparametrischen Schätzverfahren festgestellte Gegenläufigkeit hinsichtlich Auflösung und Varianz.

Die Berechnung des ML-Schätzwertes nach Gl.(12.56), auf die später noch genauer eingegangen wird, basiert auf einem Schätzwert $\hat{c}_x(k)$, $|k| \leq M-1$, bzw. auf der daraus gebildeten Kovarianzmatrix $\hat{C}_M$. Betrachtet man nun den durch die WIENER-KHINTCHINE - Beziehung gegebenen "effektiven" Kovarianzschätzwert

$$\hat{c}_{ML}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \hat{S}_{ML}(\lambda) e^{j2\pi\lambda k} d\lambda = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{M}{\sum_{\lambda} \hat{C}_M \bar{\bar{\lambda}}} d\lambda ,$$

so kann aus der Gl.(12.59) gefolgert werden, daß

$$\hat{c}_{ML}(k) \approx \hat{c}_x(k) ,$$

ist, wobei es gleichgültig ist, ob $\hat{c}_x(k)$ z.B. nach Gl.(9.10) oder auf Grund des ME-Prinzips mit dem Verfahren von BURG bestimmt worden ist. Diese Eigenschaft läßt den ML-Spektralschätzwert vielleicht etwas zweifelhaft erscheinen. Dazu ist jedoch zu bemerken, daß auch beim BT-Verfahren die dem Spektralschätzwert über die WIENER-KHINTCHINE-Relation zugeordnete Kovarianzfolge $\hat{c}_N(k)$ $w_M(k)$ und nicht $\hat{c}_N(k)$ selbst ist. Außerdem folgt aus Gl.(12.59) in Verbindung mit den Ergebnissen aus Punkt 12.1.5 bezüglich der statistischen Eigenschaften der ME/AR-Schätzwerte, daß die ML-Schätzung

konsistent ist, weil für $N, M \rightarrow \infty$

$$\hat{S}_{ML}(\lambda) \approx \hat{S}_{AR}(\lambda, M) \approx S_X(\lambda)$$

gilt. An dieser Stelle wird deutlich, daß die zunächst willkürlich erscheinende Wahl $\beta = 1/M$ bei der Bildung des Schätzwertes $\hat{S}_{ML}(\lambda) \approx \hat{q}/2$ notwendig ist, um die Konsistenz der Schätzung zu gewährleisten.

12.2.3 Anmerkungen zur Berechnung des ML-Schätzwertes

Für die Berechnung des ML-Schätzwertes stehen im Prinzip zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen könnte man vor dem Hintergrund, daß bei der Bestimmung des ME/AR-Schätzwertes der Ordnung $M-1$ nach der YW- oder BURG-Methode alle anderen AR-Parametersätze bis zu dieser Ordnung ebenfalls bestimmt werden, den Zusammenhang (12.59) ausnutzen, um $\hat{S}_{ML}(1/L)$ zu berechnen. Dieser Weg ist jedoch im Hinblick auf den Rechenaufwand nicht optimal, weil zusätzlich M FOURIER-Transformationen der Länge L sowie $ML/2$ Invertierungen und Additionen notwendig sind.

Die rechentechnisch günstigere Lösung geht direkt von Gl.(12.56) aus, wobei zunächst mit Hilfe der LEVINSON-Rekursion die Gleichung

$$\hat{\underline{C}}_M \hat{\underline{c}} = \underline{1}_M \quad \text{mit} \quad \underline{1}_M^T = (0, 0, \dots, 1)$$

für $\hat{\underline{c}}$, der letzten Spalte von $\hat{\underline{C}}_M^{-1}$ gelöst wird und dann mit einem rekursiven Algorithmus /297/, der größenordnungsmäßig noch einmal M^2 Operationen benötigt, die restlichen Spalten von $\hat{\underline{C}}_M^{-1}$ bestimmt werden. Die Berechnung der quadratischen Form $\underline{c}_\lambda^T \hat{\underline{C}}_M^{-1} \underline{c}_\lambda$ kann dann mit einer einzigen DFT durchgeführt werden, indem eine Hilfsgröße

$$g(m) = \sum_{k=-M+1}^1 \hat{c}_{k-1} \quad -(M-1) \leq m \leq M-1$$

eingeführt wird, wobei sich die Summe jeweils über diejenigen Elemente $\hat{c}_{k-1}$ von $\hat{\underline{C}}_M^{-1}$ erstreckt, für die $k-1 = m$ ist. Damit erhält man wegen

$$e^{j2\pi\lambda k} \cdot e^{-j2\pi\lambda l} = e^{j2\pi\lambda(k-l)} = e^{j2\pi\lambda m}$$

für die quadratische Form

$$\underline{c}_\lambda^T \hat{\underline{C}}_M^{-1} \underline{c}_\lambda = \sum_{m=-M+1}^{M-1} g(m) e^{j2\pi\lambda m},$$

und es ist unmittelbar ersichtlich, daß die rechte Seite für diskrete

Frequenzen $\lambda_1 = 1/L$ mit Hilfe der FFT berechnet werden kann.

Abgesehen von den bereits erwähnten Untersuchungen von LACOSS /254/, bei denen im übrigen der Faktor M nicht berücksichtigt wird, liegen bisher keine Erfahrungen über die Güte des ML-Schätzwertes vor, insbesondere was die Schätzung von Dichtespektren rein stochastischer Prozesse angeht. In diesem Zusammenhang erscheint es lohnenswert, auch der Frage nachzugehen, ob die Probleme der ME/AR-Schätzwerte bei schlechter Wahl der Modellordnung - vor allem, wenn M zu groß geschätzt wird, vgl. Punkt 12.1.10 - mit Hilfe des weniger "empfindlichen" ML-Schätzwertes abgebaut werden können. Mit diesem kurzen Ausblick soll die Diskussion des ML-Schätzwertes von CAPON abgeschlossen sein. In den beiden nächsten Abschnitten werden einige grundlegende Zusammenhänge bei der Schätzung von Leistungsdichtespektren auf der Basis von MA- und ARMA- Prozeßmodellen dargestellt.

12.3 Spektralschätzwerte auf der Grundlage eines MA-Modells

Obwohl die MA-Prozesse gerade im Hinblick auf die spektrale Leistungsdichte eine Sonderstellung einnehmen, weil jedem stetigen Dichtespektrum ein MA-Prozeß zugeordnet werden kann, vgl. Abschnitt 7.2, so haben MA-Modelle als Grundlage für die Schätzung des Dichtespektrums keine große Bedeutung. Im folgenden werden deshalb nur die Gründe für diese Aussage anhand der wesentlichen Eigenschaften von MA-Prozessen dargestellt.

12.3.1 Zur Schätzung der Modellparameter

Grundlage für die Betrachtungen bildet das endliche MA-Prozeßmodell

$$\tilde{x}(n,e) = \sum_{m=0}^M b_m w(n-m,e) \quad (12.60)$$

für den zu analysierenden Prozeß $x(n,e)$, von dem wiederum der Ausschnitt $x_N(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, einer Musterfunktion in Form der Daten gegeben sein soll. In Gl.(12.60) ist $w(n,e)$ ein diskreter "Weißer Prozeß" mit

$$E w(n,e) = 0 \quad \text{und} \quad c_w(k) = \gamma_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$$

Im Gegensatz zu der Darstellung im Abschnitt 7.2 wird hier $\sigma_w^2 = S_0 = 1$ und dafür $b_0 \neq 1$ gesetzt, wodurch sich gewisse formale Vereinfachungen ergeben. So läßt sich gemäß Gl.(7.11) die Leistungsdichte von $\tilde{x}(n,e)$ in der Form

$$S_X(\lambda) = \left| \sum_{m=0}^M b_m e^{-j2\pi\lambda m} \right|^2 \quad (12.61)$$

darstellen, und mit

$$B(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} = b_0 \sum_{m=0}^M \left(1 - \frac{z_{om}}{z}\right)$$

erhält man die äquivalente Form

$$S_X(\lambda) = b_0^2 \prod_{m=0}^M (1 - z_{om} e^{-j2\pi\lambda}) (1 - z_{om}^* e^{j2\pi\lambda}) ,$$

aus der deutlich wird, daß $S_X(\lambda)$ ausgeprägte Einbrüche aufweist, wenn Nullstellen z_{om} von $B(z)$ in der Nähe des Einheitskreises liegen; vgl. die Bemerkungen am Schluß von Punkt 12.1.2.

Außerdem erstreckt sich die Schätzung dieses Spektrums demnach nur auf die MA-Parameter b_m , $0 \leq m \leq M$, und auf die Ordnung M des Modells. Zu dem letzten Punkt wird später noch etwas zu sagen sein; vorläufig wird die Modellordnung M als gegeben angesehen.

Der Versuch, die Modellparameter auf der Grundlage des Maximum-Likelihood-Prinzips zu schätzen, führt wie im Falle der AR-Modelle auf keine praktikable Lösung / 7 /, so daß es naheliegend ist, von einer Standardschätzmethode wie die der minimalen Fehlerquadrate auszugehen.

Dann besteht die Aufgabe darin, die Parameter b_m des Modells (12.60) so zu bestimmen, daß der quadratische Mittelwert des Fehlers

$$\epsilon(n,e) = x(n,e) - \tilde{x}(n,e) = x(n,e) - \sum_{m=0}^M b_m w(n-m,e) \quad (12.62)$$

minimal wird. Das ist aber der Fall, wenn das Orthogonalitätsprinzip

$$\epsilon(n,e) w(i,e) = 0 \quad \text{für } i = n-M, \dots, n-1, n$$

erfüllt ist. Ersetzt man in dieser Forderung $\epsilon(n,e)$ durch die rechte Seite von Gl.(12.62), so erhält man für die optimalen Koeffizienten

$$b_k^* = E x(n,e) w(n-k,e) = c_{wx}(k), \quad 0 \leq k \leq M. \quad (12.63)$$

Auf Grund der zur Verfügung stehenden Daten $x_N(n)$ läßt sich aber kein Schätzwert für die Kreuzkovarianzfolge $c_{wx}(k)$ gewinnen, so daß die extrem einfache Lösung (12.63) für die Bestimmung der MA-Parameter unbrauchbar ist.

Dagegen ist es sehr wohl möglich, Schätzwerte für die Kovarianzfolge $c_x(k)$ aus den Daten zu berechnen, so daß versucht werden muß, einen Zusammenhang zwischen den Parametern b_m und der Kovarianzfolge $c_x(k)$ des Modells herzustellen. Das ist aber sehr einfach möglich, indem man Gl.(12.60) mit $\tilde{x}(n-k|,e)$ multipliziert und anschließend den Erwartungswert bildet. Damit ergibt sich für die Kovarianzfolge des Modells

$$c_x(k) = \begin{cases} \sum_{0}^{M-|k|} b_m b_{m+|k|} & \text{für } |k| \leq M \\ 0 & \text{für } |k| > M \end{cases} \quad (12.64)$$

d.h. ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der MA-Parameter b_m . Auf die Lösung der Gleichungen (12.64), wenn $M+1$ Kovarianzschätzwerten für $0 \leq k \leq M$ bekannt sind, soll nicht näher eingegangen werden, z.B. / 7 /, /262/, weil hier weniger die Bestimmung der MA-Parameter als vielmehr die Schätzung der spektralen Leistungsdichte im Vordergrund steht.

12.3.2 Zusammenhang mit den BT-Schätzwerten

Für die Gewinnung eines Spektralschätzwertes auf der Basis des MA-Modells (12.60) ist jedoch die Kenntnis der b_m überhaupt nicht notwendig, denn wegen der endlichen Länge der Kovarianzfolge nach Gl.(12.64) kann der Spektralschätzwert direkt in der Form

$$\hat{S}_x(\lambda) = \sum_{-M}^M \hat{c}_x(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

dargestellt werden. Dies ist aber nichts anderes als ein BT-Schätzwert, in dem sich unterschiedliche Kovarianzgewichtungen bzw. Spektralfenster in der Verwendung verschiedener Kovarianzschätzwerte der Form

$$\hat{c}_x(k) = \hat{c}_N(k) w_M(k)$$

niederschlagen, so daß als eigentliches Problem die Bestimmung der Modellordnung M und damit die Länge der Kovarianzgewichtung in dem BT-Schätzwert übrigbleibt.

Auf Grund der Eigenschaft (12.64), daß nämlich die Kovarianzfolge eines MA-Prozesses für $|k| > M$ gleich Null ist, liegt es nahe, anhand eines Schätzwertes $\hat{c}_x(k)$ zu prüfen, ob dieser für $|k| > k^*$ hinreichend schnell gegen Null geht. In /216/ wird ein Test vorgeschlagen, ob $\hat{c}_x(k)$ für $k > k^*$ im Vergleich zur Varianz der Schätzwerte für $|k| \leq k^*$ hinreichend nahe an

Null liegt. Wenn dies der Fall ist, wird $k^* = M$ als Ordnung des MA-Prozeßmodells angenommen. Falls dabei $k^* = M$ zu groß wird, wie dies z.B. bei Spektren mit ausgeprägten Resonanzüberhöhungen der Fall ist, so ist es i.a. günstiger, mit einem ME/AR-Schätzwert zu arbeiten.

Zum Schluß dieses Abschnitts soll noch auf einen interessanten Aspekt hingewiesen werden, der sich aus der Feststellung ergibt, daß der MA-Spektralschätzwert formal identisch mit einem BT-Schätzwert ist. Dieses Ergebnis kann nämlich auch dahingehend interpretiert werden, daß die als nichtparametrisch eingeführten BT-Schätzwerte - und zwar sowohl die direkten als auch die indirekten, vgl. Abschnitt 11.2 - eigentlich parametrische Schätzwerte auf der Grundlage eines MA-Modells sind.

Vor diesem Hintergrund könnte dann die Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts, daß Spektralschätzwerte auf der Grundlage eines MA-Modells vergleichsweise unbedeutend sind, dahingehend korrigiert werden, daß gerade sie auf Grund des Zusammenhangs mit den BT-Schätzwerten außerordentliche Bedeutung erlangt haben.

12.4 ARMA-Modelle als Grundlage für Spektralschätzungen

Nachdem die theoretischen Eigenschaften sowie die Vor- und Nachteile der ME/AR-Schätzwerte i.w. bekannt und die parametrischen Spektralschätzwerte auf der Grundlage von MA-Modellen identisch mit den BT-Schätzwerten sind, hat sich in jüngerer Zeit das Interesse zunehmend auf die Entwicklung von ARMA-Schätzverfahren verlagert. Das hat verschiedene Gründe: Wie im Abschnitt 7.3 gezeigt worden ist, können Mischprozesse, die sich aus einer deterministischen und einer stochastischen Komponente zusammensetzen, vorteilhaft durch ARMA-Prozesse nachgebildet werden. Mischprozesse werden im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt, aber auch im Zusammenhang mit der Modellierung stationärer stochastischer Prozesse gewinnen die ARMA-Modelle an Bedeutung. Das liegt einmal daran, daß sich die Spektren von MA- und AR-Prozessen relativ großer Ordnung vielfach durch ARMA-Modelle sehr niedriger Ordnung gut approximieren lassen, und Modelle mit einer kleinen Zahl von Parametern sowohl aus Gründen des Rechenaufwands ("parsimony") als auch im Hinblick auf die z.B. physikalisch-technische Interpretation wünschenswert sind. Als weiterer Grund sei erwähnt, daß das "kovarianz-invariante" diskrete Modell eines kontinuierlichen Allpol-Prozesses $x(t,e)$ mit Ordnung M und Kovarianzfunktion $c_x(t)$ ein ARMA $(M,M-1)$ -Prozeß mit der Kovarianzfolge $c_x^*(k)$ ist /265/, /285/. Dabei heißt kovarianz-invariant, daß

$$c_x^*(k) = c_x(k \Delta t)$$

ist; wenn das Leistungsdichtespektrum $S_x(f)$ des kontinuierlichen Prozesses im Intervall $(-1/2\Delta t, 1/2\Delta t)$ bandbegrenzt ist, so gilt dann mit den Ergebnissen aus Abschnitt 8.1

$$S_x(f) = \Delta t S_x^*(f\Delta t) \quad \text{für} \quad |f| \leq \frac{1}{2\Delta t}.$$

Daraus folgt, daß die digitale Schätzung der Leistungsdichte zeitkontinuierlicher Tiefpaßprozesse, die speziell in technischen Bereichen häufig auftreten, vorteilhaft auf der Grundlage von ARMA-Modellen durchgeführt werden sollte.

12.4.1 Ableitung der Normalgleichungen

Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bildet das ARMA(M,L)-Modell

$$\tilde{x}(n,e) = - \sum_{m=1}^M a_m \tilde{x}(n-m,e) + \sum_{l=0}^L b_l w(n-l,e) \quad (12.65)$$

für den Prozeß $x(n,e)$, aus dem die für die Schätzung zur Verfügung stehenden Daten $x_N(n)$ stammen. Hierbei ist $w(n,e)$ wiederum ein mittelwertfreier "Weißer Prozeß" mit $c_w(k) = \gamma_0(k)$, so daß sich das Leistungsdichtespektrum des Modellprozesses in der Form

$$S_x(\lambda) = \frac{\left| \sum_{l=0}^L b_l e^{-j2\pi\lambda l} \right|^2}{\left| \sum_{m=1}^M a_m e^{-j2\pi\lambda m} \right|^2} \quad (a_0 = 1) \quad (12.66)$$

darstellen läßt. Dieses Ergebnis folgt aus Gl.(7.15), wenn man im Zähler $\sigma_w^2 = S_0$ in das Betragsquadrat zieht, so daß insbesondere $b_0 = \sigma_w$ gilt.

Aus Gl.(12.66) wird deutlich, daß sich die Schätzung eines ARMA-Spektrums auf die sogenannten AR-Parameter a_m , die MA-Parameter b_l sowie auf die beiden Modellordnungen M und L erstreckt. Die damit verbundenen grundsätzlichen Probleme können am einfachsten deutlich gemacht werden, wenn man die Kovarianzfunktion des Modellprozesses bestimmt. Multipliziert man dazu Gl.(12.65) mit $\tilde{x}(n-k|e)$ und bildet den Erwartungswert, so erhält man

$$c_x(k) = - \sum_{m=1}^M a_m c_x(|k|-m) + \sum_{l=0}^L b_l c_{wx}(|k|-l), \quad (12.67)$$

wobei für die Kreuzkovarianzfolge offensichtlich

$$c_{wx}(k) = \mathcal{E}w(u,e) x(n-k,e) = 0 \quad \text{für } k > 0 \quad (12.68)$$

gilt, weil der "Weiße Prozeß" $w(n,e)$ nicht mit vergangenen Werten von $x(n,e)$ korreliert ist. Daraus folgt, daß für $|k| > L$ die von den ME/AR-Schätzwerten her bekannte Rekursionsformel

$$c_x(k) = - \sum_{m=1}^M a_m c_x(|k|-m), \quad |k| > L,$$

auch für ARMA-Prozesse Gültigkeit hat.

Für die Berechnung von $c_x(k)$ für $|k| \leq L$ ist es sinnvoll, mit der Impulsantwort

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\sum_{l=0}^L b_l z^{-l}}{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}} z^{n-1} dz \quad (12.69)$$

zu arbeiten. In Gl.(12.69) kann der Integrationsweg längs des Einheitskreises gewählt werden, weil das Formfilter im Hinblick auf die Stationarität des Prozesses $\tilde{x}(n,e)$ stabil sein muß, d.h. alle Pole im Inneren des Einheitskreises liegen. Damit läßt sich der Modellprozeß in der Form

$$\tilde{x}(n,e) = \sum_0 h(m) w(n-m,e)$$

darstellen, so daß sich für die Kreuzkovarianzfolge

$$\begin{aligned} c_{wx}(k) &= \mathcal{E}w(n,e) \sum_0 h(m) w(n-k-m,e) \\ &= \sum_u h(m) \gamma_0(k+m) = h(-k) \end{aligned}$$

ergibt, wodurch im übrigen die Aussage von Gl.(12.68) bestätigt wird. Setzt man dieses Ergebnis in Gl.(12.67) ein, so erhält man in Verbindung mit Gl.(12.68) die sogenannten Normalgleichungen eines ARMA(M,L)-Prozesses

$$c_x(k) = - \sum_{m=1}^M a_m c_x(|k|-m) + \sum_{l=0}^L b_l h(l-|k|) \quad \text{für } |k| \leq L \quad (12.70a)$$

$$c_x(k) = - \sum_{m=1}^M a_m c_x(|k| - m)^e \quad \text{für } |k| > L. \quad (12.70b)$$

Dieses Gleichungssystem stellt einen Zusammenhang zwischen den Parametern a_m und b_l und der Kovarianzfolge $c_x(k)$ des Prozeßmodells $\tilde{x}(n,e)$ dar. Es entspricht damit den YW-Gleichungen bei den ME/AR-Schätzwerten und wird deshalb i.a. ebenfalls mit diesem Namen verbunden.

Im folgenden Punkt werden die mit der Schätzung der Modellparameter anhand dieser Gleichungen auftretenden Probleme aufgezeigt und einige Lösungsansätze dargestellt.

12.4.2 Zur Schätzung der Modellparameter

Beachtet man, daß $h(n)$ gemäß Gl.(12.69) von den Modellparametern a_m und b_l abhängt, so stellt die Lösung von Gl.(12.70) auf der Grundlage von Schätzwerten für $c_x(k)$ ein stark nichtlineares Problem dar. Der Versuch, die Lösung der Normalgleichungen dadurch zu umgehen, daß man die Anpassung des Modells (12.60) mit der Methode der minimalen Fehlerquadrate vornimmt, führt ebenfalls auf die nichtlinearen YW-Gleichungen.

Eine optimale Lösung ist demnach nur mit speziellen iterativen Verfahren möglich, verbunden mit dem Problem, geeignete Startwerte zu finden, und der Möglichkeit, daß ggf. nur ein lokales Minimum erreicht wird oder das Verfahren überhaupt nicht konvergiert.

Diese Schwierigkeiten können dadurch vermieden werden, daß man sich mit einer suboptimalen Lösung zufrieden gibt, indem die AR- und MA- Parameter getrennt bestimmt werden.

Aus der unteren Zeile von Gl.(12.70) folgt unmittelbar, daß die AR-Parameter a_m aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_x(L) & \hat{c}_x(L-1) & \dots & \hat{c}_x(L-M+1) \\ \hat{c}_x(L+1) & \hat{c}_x(L) & \dots & \hat{c}_x(L-M+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{c}_x(L+M-1) & \hat{c}_x(L+M-2) & \dots & \hat{c}_x(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{c}_x(L+1) \\ \hat{c}_x(L+2) \\ \vdots \\ \hat{c}_x(L+M) \end{bmatrix}$$

bestimmt werden können, wenn entsprechende Schätzwerte für $c_x(k)$ zur Verfügung stehen. Dabei ist zu beachten, daß die darin auftretende Kovarianzmatrix zwar TOEPLITZ-Struktur besitzt, aber nicht symmetrisch ist. Für die Lösung dieser sogenannten modifizierten YW-Gleichungen steht ein Algorithmus zur Verfügung /299,300/, der größenordnungsmäßig M^2 Operationen benötigt.

Neben diesem üblichen Verfahren, bei dem genau M YW-Gleichungen für die Bestimmung der AR-Parameter verwendet werden, ist es auch möglich, von einem überbestimmten Gleichungssystem auszugehen, in dem alle aus den Daten zu gewinnenden Kovarianzschätzwerte berücksichtigt werden; dadurch soll die Varianz der Schätzwerte $\hat{a}_m$ verringert werden /238/.

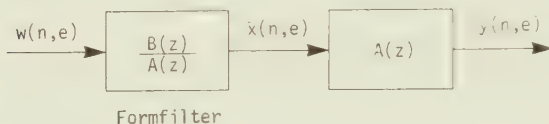


Bild 12.9

Nachdem die AR-Parameter geschätzt worden sind, können die MA-Parameter b_1 auf Grund der folgenden Zusammenhänge bestimmt werden, vgl. Bild 12.9. Wird der Prozeß $\tilde{x}(n,e)$ durch ein Filter mit der Übertragungsfunktion $A(z)$ geleitet, so ist der Ausgangsprozeß

$$\tilde{y}(n,e) = \sum_0^M a_m \tilde{x}(n-m,e) \quad (a_0 = 1) \quad (12.71)$$

offensichtlich der MA-Prozeß

$$\tilde{y}(n,e) = \sum_0^L b_1 w(n-1,e) ,$$

dessen Kovarianzfolge gemäß Gl.(12.64)

$$c_y(k) = \begin{cases} \sum_0^{L-|k|} b_1 b_{1+|k|} & \text{für } |k| \leq L \\ 0 & \text{für } |k| > L . \end{cases} \quad (12.72)$$

ist. Andererseits erhält man aber aus Gl.(12.71) durch Multiplikation mit $y(n-|k|,e)$ und anschließender Erwartungswertbildung

$$c_y(k) = \sum_{l=0}^M \sum_{m=0}^M a_l a_m c_x(1-m-|k|) , \quad |k| \leq L, \quad (12.73)$$

so daß im Prinzip die MA-Parameter b_1 auf der Grundlage von Schätzwerten für $c_x(k)$ aus den Gl.n.(12.73) und (12.72) berechnet werden können / 7 /. Das erfordert aber wie im Fall der MA-Modelle die Lösung der nichtlinearen Gl.(12.72).

Beachtet man deshalb wiederum, daß nicht die Parameter b_1 interessieren, sondern ein Schätzwert für das Leistungsdichtespektrum $S_x(\lambda)$ nach Gl.(12.66),

so kann man diesen wegen

$$\left| \sum_0^L b_l e^{-j2\pi\lambda l} \right|^2 = S_Y(\lambda) = \sum_{-L}^L c_Y(k) e^{-j2\pi\lambda k}$$

in der Form

$$\hat{S}_X(\lambda) = \frac{\sum_{-L}^L \hat{c}_Y(k) e^{-j2\pi\lambda k}}{\underbrace{\sum_0^M a_m e^{-j2\pi\lambda m}}_1} \quad (a_0 = 1) \quad (12.74)$$

darstellen, wobei $\hat{c}_Y(k)$ gemäß Gl.(12.73) aus geeigneten Schätzwerten $\hat{c}_X(k)$ berechnet werden kann.

Eine andere Möglichkeit zur Schätzung des "MA-Anteils" im Dichtespektrum basiert auf einer Zerlegung der Kovarianzfolge $c_X(k)$ in einen "kausalen" Anteil

$$c_X^+(k) = \begin{cases} c_X(k) & \text{für } k > 0 \\ \frac{1}{2} c_X(k) & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

und einen entsprechenden "nichtkausalen" Anteil $c_X^-(k)$ /235/.

Greift man dazu auf die Darstellung

$$C_X(e^{j2\pi\lambda}) = S_X(\lambda)$$

zurück, vgl. Abschnitt 6.1, so kann

$$C_X(z) = \frac{B(z) B(\frac{1}{z})}{A(z) A(\frac{1}{z})} = \frac{P(z)}{A(z)} + \frac{P(\frac{1}{z})}{A(\frac{1}{z})} \quad (12.75)$$

entsprechend zerlegt werden in

$$C_X(z) = C_X^+(z) + C_X^-(z) \quad ,$$

wobei offensichtlich die Zusammenhänge

$$C_X^+(z) = \frac{P(z)}{A(z)} = \sum_0 c_X^+(k) z^{-k} \quad (12.76)$$

und

$$c_x^-(z) = \frac{P(\frac{1}{z})}{A(\frac{1}{z})} = \sum_{k=0}^M c_x^-(k) z^{-k}$$

bestehen. Schreibt man nun

$$P(z) = \sum_{l=0}^M p_l z^{-l},$$

so folgt aus Gl.(12.76)

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^M p_l z^{-l} &= \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} \sum_{k=0}^M c_x^+(k) z^{-k} \\ &= \sum_{l=0}^M z^{-l} \sum_{m=0}^l a_m c_x^+(l-m) \end{aligned}$$

und somit

$$p_l = \sum_{m=0}^l a_m c_x^+(l-m) \quad \text{für} \quad 0 \leq l \leq M. \quad (12.77)$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß wegen des zweiten Teils von Gl.(12.70)

$p_l = 0$ gilt, wenn $l > M \geq L$ ist.

Ausgehend von Gl.(12.75) erhält man damit einen Schätzwert für $S_x(\lambda)$ in der Form

$$\hat{S}_x(\lambda) = 2 \operatorname{Re} \frac{\sum_{l=0}^M \hat{p}_l e^{-j\lambda l}}{\sum_{m=0}^M \hat{a}_m e^{-j\lambda m}}, \quad (12.78)$$

wobei die Koeffizienten $\hat{p}_l$ nach Gl.(12.77) aus Schätzwerten $\hat{c}_x(k)$ berechnet werden können.

Allerdings ist es möglich, daß dieser Schätzwert ebenso wie der nach Gl.(12.74) negativ wird, auch wenn für die Berechnung von $\hat{p}_l$ nach Gl.(12.77) bzw. $\hat{c}_y(k)$ nach Gl.(12.73) von positiv semidefiniten Schätzwerten für $c_x(k)$ ausgegangen wird [252]. Dieser Nachteil kann dadurch vermieden werden, daß für die Berechnung von $S_x(\lambda)$ nach Gl.(12.74) anstelle des aus Gl.(12.73) gewonnenen Schätzwertes $\hat{c}_y(k)$ ein aus den gefilterten Daten

$$y_N(n) = \sum_{m=0}^M \hat{a}_m x_N(n-m) \quad M \leq n \leq N-1, \quad (\hat{a}_0 = 1)$$

berechneter positiv semidefiniter Schätzwert $\tilde{c}_y(k)$ verwendet wird. Auf Grund der in Verbindung mit Bild 12.9 dargestellten Zusammenhänge wird dabei $y_N(n)$ als Ausschnitt einer Musterfolge eines durch $\tilde{y}(n,e)$ modellierten MA-Prozesses interpretiert. Bei den bisherigen Betrachtungen ist die Schätzung der Modellordnungen M und L außer acht gelassen worden. Eine Möglichkeit zur Festlegung von M besteht darin, die aus dem zweiten Teil von Gl.(12.70) folgende Eigenschaft

$$\det \underline{C}_K = 0 \quad \text{für } K > M \quad \text{und} \quad 1 > \max(L, K)$$

der modifizierten Kovarianzmatrix

$$\underline{C}_K = \begin{bmatrix} c_x(1-1) & c_x(1-2) & \dots & c_x(1-K) \\ c_x(1) & c_x(1-1) & \dots & c_x(1-K+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_x(1+K-2) & c_x(1+K-3) & \dots & c_x(1-1) \end{bmatrix}$$

zu verwenden /217/, und dann die MA-Ordnung L mit dem im Punkt 12.3 skizzierten Test anhand der "MA-Daten" $y_N(n)$ festzulegen. Ein anderer Zugang zur Lösung dieses Problems stammt von AKAIKE, der im Zusammenhang mit einem hier nicht dargestellten Verfahren zur Bestimmung der ARMA-Parameter das von ihm vorgeschlagene AIC-Kriterium verwendet, vgl. Punkt 12.1.10 und /206/. Die Wahl von M und L bei den ARMA-Schätzverfahren ist naturgemäß noch schwieriger als die Schätzung der Modellordnung von ME/AR-Schätzwerten und stellt ein bisher nur ansatzweise gelöstes Problem dar.

Darüber hinaus bedarf es angesichts der Vielfalt der in den letzten Jahren vorgeschlagenen ARMA-Verfahren und der für ihre Realisierung verwendeten Algorithmen einer sorgfältigen Prüfung hinsichtlich signifikanter Unterschiede und ihrer Brauchbarkeit für die Schätzung der spektralen Leistungsdichte stationärer stochastischer Prozesse, so daß ein zusammenfassender Überblick zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht möglich erscheint. Mit dieser Bemerkung sollen die Ausführungen über die parametrischen Spektralschätzverfahren abgeschlossen werden. Der Verweis auf die Literatur bezüglich hier nicht dargestellter Verfahren bildet dabei gleichzeitig einen Übergang zu der im Teil IV enthaltenen Literatursammlung, in der versucht wird, nach Sachgebieten geordnet einen Überblick über die zum Themenkreis dieser Arbeit erschienenen Beiträge zu vermitteln.

IV Anhang und Literaturübersicht

13. Anhang

In diesem Kapitel werden verschiedene Summen- und Integralbeziehungen zusammengestellt, die vorallem bei den Abschätzungen der statistischen Eigenschaften der untersuchten Spektralschätzwerte benötigt worden sind. Außerdem wird die Auswertung bestimmter Doppelintegrale dargestellt, die im Text aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgespart worden ist.

13.1 Doppelsummen mit trigonometrischen Kernen

$$S_1 = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n-m) \cos \omega(n-m) = \sum_{1-N}^{N-1} (N-|k|) f(k) \cos \omega k$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n-m) \cos \omega(n+m) = \frac{\cos \omega(N-1)}{\sin \omega} \sum_{1-N}^{N-1} f(k) \sin \omega(N-|k|) \\ &= \frac{\sin \omega N \cos \omega(N-1)}{\sin \omega} \sum_{1-N}^{N-1} f(k) \cos \omega k - \frac{\cos \omega N \cos \omega(N-1)}{\sin \omega} \sum_{1-N}^{N-1} f(k) \sin \omega k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n-m) \sin \omega(n+m) = \frac{\sin \omega(N-1)}{\sin \omega} \sum_{1-N}^{N-1} f(k) \sin \omega(N-|k|) \\ &= \frac{\sin \omega N \sin \omega(N-1)}{\sin \omega} \sum_{1-N}^{N-1} f(k) \cos \omega k - \frac{\cos \omega N \sin \omega(N-1)}{\sin \omega} \sum_{1-N}^{N-1} f(k) \sin \omega k \end{aligned}$$

$$S_4 = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n-m) \sin \omega(n-m) = \sum_{1-N}^{N-1} (N-|k|) f(k) \sin \omega k$$

13.2 Häufig verwendete Summenformeln

$$S_5 = \sum_M^N e^{j2\pi\lambda n} = e^{j\pi\lambda(M+N)} \frac{\sin \pi\lambda(N-M+1)}{\sin \pi\lambda}$$

$$S_6 = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{kn}{N}} = \begin{cases} N & \text{für } n = mN, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S_7 = \sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{(N-1)N}{2} \quad S_7' = \sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$S_8 = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{N-1}{3} N \left(N - \frac{1}{2}\right) \quad S'_8 = \sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{3} (N+1) \left(N + \frac{1}{2}\right)$$

$$S_9 = \sum_{n=0}^{N-1} a q^n = \sum_{n=1}^N a q^{n-1} = a \frac{1-q^N}{1-q}$$

$$S_{10} = \sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

13.3 Doppelintegrale mit trigonometrischen Kernen

$$I_1 = \int_0^T \int_0^T f(t-s) \cos \omega(t-s) dt ds = \int_{-T}^T (T - |\tau|) f(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \int_0^T f(t-s) \cos \omega(t+s) dt ds = \frac{\cos \omega T}{\omega} \int_{-T}^T f(\tau) \sin \omega(T - |\tau|) d\tau \\ &= \frac{\sin \omega T \cos \omega T}{\omega} \int_{-T}^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \frac{\cos^2 \omega T}{\omega} \int_{-T}^T f(\tau) \sin \omega |\tau| d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^T \int_0^T f(t-s) \sin \omega(t+s) dt ds = \frac{\sin \omega T}{\omega} \int_{-T}^T f(\tau) \sin \omega(T - |\tau|) d\tau \\ &= \frac{\sin^2 \omega T}{\omega} \int_{-T}^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \frac{\sin \omega T \cos \omega T}{\omega} \int_{-T}^T f(\tau) \sin \omega |\tau| d\tau \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_0^T \int_0^T f(t-s) \sin \omega(t-s) dt ds = \int_{-T}^T (T - |\tau|) f(\tau) \sin \omega \tau d\tau$$

13.4 Auswertung bestimmter Doppelintegrale

Berechnet wird zunächst das Integral

$$I_{\pm}(s, t) = \iint g(s-u) g(t-v) c_X(u-v) e^{j2\pi f_m(u \pm v)} du dv,$$

das i.w. eine zweidimensionale Faltung darstellt.

Auf Grund der WIENER-KHINTCHINE-Beziehung ergibt sich

$$I_{\pm}(s, t) = \int S_X(f) \int g(s-u) e^{j2\pi u(f + f_m)} du \int g(t-v) e^{-j2\pi v(f \pm f_m)} dv df$$

$$= \int S_X(f) G(f + f_m) \overline{G(f - f_m)} e^{j2\pi [s(f + f_m) - t(f - f_m)]} df.$$

Daraus erhält man die gesuchten Integrale als Real- bzw. Imaginärteile:

$$\begin{aligned} I_{c+}(s, t) &= \operatorname{Re} I_+(s, t) \\ &= \operatorname{Re} e^{j2\pi f_m(s+t)} \int S_X(f) G(f + f_m) \overline{G(f - f_m)} e^{j2\pi f(s-t)} df \\ &= \cos 2\pi f_m(s+t) \int S_X(f) G(f + f_m) \overline{G(f - f_m)} e^{j2\pi f(s-t)} df, \end{aligned}$$

weil das Produkt $G(f + f_m) \overline{G(f - f_m)}$ eine gerade Funktion in f ist.

$$\begin{aligned} I_{c-}(s, t) &= \operatorname{Re} I_-(s, t) \\ &= \operatorname{Re} \int S_X(f) |G(f + f_m)|^2 e^{j2\pi(f + f_m)(s-t)} df \\ &= \operatorname{Re} \int |G(f)|^2 S_X(f - f_m) e^{j2\pi f(s-t)} df \\ &= \frac{1}{2} \int |G(f)|^2 [S_X(f - f_m) + S_X(f + f_m)] e^{j2\pi f(s-t)} df. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{s+}(s, t) &= \operatorname{Im} I_+(s, t) \\ &= \sin 2\pi f_m(s+t) \int S_X(f) G(f + f_m) \overline{G(f - f_m)} e^{j2\pi f(s-t)} df. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{s-}(s, t) &= \operatorname{Im} I_-(s, t) \\ &= \operatorname{Im} \int |G(f)|^2 S_X(f - f_m) e^{j2\pi f(s-t)} df \\ &= \frac{1}{2j} \int |G(f)|^2 [S_X(f - f_m) - S_X(f + f_m)] e^{j2\pi f(s-t)} df. \end{aligned}$$

13.5 Auswertung eines speziellen Integrals

Das Integral

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin \pi N(\alpha - \lambda)}{\sin \pi(\alpha - \lambda)} \frac{\sin \pi N(\beta \pm \lambda)}{\sin \pi(\beta \pm \lambda)} d\lambda$$

kann in Verbindung mit S_5 aus Anhang 13.2 in der Form

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{-L}^L e^{j2\pi n(\alpha - \lambda)} \sum_{-L}^L e^{j2\pi m(\beta \pm \lambda)} d\lambda$$

geschrieben werden; dabei sei N gerade und $L = \frac{N-1}{2}$.

Vertauscht man die Reihenfolge von Integration und Summationen, so ergibt sich

$$I = \sum_{-L}^L \sum_{-L}^L e^{j2\pi n\alpha} e^{j2\pi m\beta} \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j2\pi\lambda(n \pm m)} d\lambda}_J,$$

wobei für das Integral

$$J = \frac{\sin\pi(n \pm m)}{\pi(n \pm m)} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = \pm m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Damit erhält man schließlich wiederum mit der Summenformel S_5

$$I = \sum_{-L}^L e^{j2\pi n(\alpha \pm \beta)} = \frac{\sin\pi N(\alpha \pm \beta)}{\sin\pi(\alpha \pm \beta)}.$$

14. Literaturübersicht

In diesem Abschnitt wird eine Zusammenstellung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit gesammelten und weitgehend ausgewerteten Literatur gebracht. Dabei sind naturgemäß mehr Beiträge angefallen, als im Text zitiert worden sind; die nichtzitierten Stellen werden mit einem * gekennzeichnet.

Es wird versucht, diese Übersicht nach einem gewissen Ordnungsschema aufzubauen, das sich im wesentlichen an der Gliederung der Arbeit orientiert. Dabei läßt es sich jedoch nicht vermeiden, daß verschiedene Beiträge, die inhaltlich mehreren der aufgeführten Sachgruppen zugeordnet werden können, in gewissem Maße willkürlich nur unter einem Punkt erscheinen; wenn möglich, wird die Zuordnung anhand des Titels der jeweiligen Arbeit vorgenommen.

Bücher: Mathematik, Systemtheorie, Statistik

- /1/ ABRAMOWITZ, M. & I.A. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publ., New York 1970.
- /2/* ANDERSON, T.W.: The Statistical Analysis of Time Series. John Wiley, New York 1971.
- /3/ BARTLETT, M.S.: An Introduction to Stochastic Processes. Cambridge University Press, Cambridge 1966.
- /4/ BENDAT, J.B. & A.G. PIERSON: Random Data: Analysis and Measurement Procedures. John Wiley, New York 1971.
- /5/* ———: Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis. John Wiley, New York 1980.
- /6/ BOCHNER, S.: Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Chelsea Publ. Comp., New York 1948.
- /7/ BOX, G.E.P. & G.M. JENKINS. Time Series Analysis: Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco 1976.
- /8/* BRILLINGER, D.R.: Time Series: Data Analysis and Theory. Holden Day, San Francisco 1981.
- /9/ BRIOLLIN, L.: Science and Information Theory. Academic Press, New York 1956.
- /10/ CAMPBELL, G.A.: Fourier Integrals for Practical Applications. Van Nostrand, Princeton 1967.

- /11/ CRAMER, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press, Princeton 1966.
- /12/ DEUTSCH, R.: Estimation Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1965.
- /13/ DOETSCH, G.: Funktionaltransformationen. In: R. SAUER & I. SZABO: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. Springer, Berlin 1967.
- /14/ DOOB, J.L.: Stochastic Processes. John Wiley, New York 1960.
- /15/ FUNK, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Springer, Berlin 1962.
- /16/* GILOI, W.: Simulation und Analyse stochastischer Vorgänge, R. Oldenbourg, München 1967.
- /17/ GRENDER, U. & M. ROSENBLATT: Statistical Analysis of Stationary Time Series. John Wiley, New York 1957.
- /18/ GUILLEMIN, E.A.: Mathematische Methoden des Ingenieurs. R. Oldenbourg, München 1966.
- /19/ HANSLER, E.: Grundlagen der Theorie statistischer Signale. Springer, Berlin 1983.
- /20/ JAGLOM, A.M.: Einführung in die Theorie stationärer Zufallsfunktionen. Akademik-Verlag, Berlin 1959.
- /21/ JENKINS, G.M. & D.G. WATTS: Spectral Analysis and Its Applications. Holden Day, San Francisco 1969.
- /22/ KOOPMANS, L.H.: Spectral Analysis of Time Series. Academic Press, New York 1974.
- /23/* KORN, G.A.: Random Process Simulation and Measurements. McGraw-Hill, New York 1966.
- /24/ KULLBACK, S.: Information Theory and Statistics. John Wiley, New York 1959.
- /25/ KOPFMÖLLER, K.: Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Hirzel, Stuttgart 1968.
- /26/ LEE, Y.W.: Statistical Theory of Communication. John Wiley, New York 1960.
- /27/ MEIXNER, J. & F.W. SCHAFKE. Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Springer, Berlin 1954.

- /28/ MIDDLETON, D.: An Introduction to Statistical Communication Theory. McGraw-Hill, New York 1960.
- /29/ OPPENHEIM, A.V. & R.W. SCHAFER: Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1975.
- /30/ OTNES, R.K. & L. ENOCHSON: Digital Time Series Analysis. John Wiley, New York 1972.
- /31/ PAPOULIS, A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. McGraw. Hill, New York 1965.
- /32/ PARZEN, E.: Modern Probability Theory and Its Applications. John Wiley, New York 1960.
- /33/ ———: Stochastic Processes. Holden Day, San Francisco 1962.
- /34/ SCHLITT, H.: Systemtheorie für regellose Vorgänge. Springer, Berlin 1960.
- /35/ ———: Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen. Vieweg, Braunschweig 1968.
- /36/ SCHLITT, H. & F. DITTRICH: Statistische Methoden der Regelungstechnik. Bibliographisches Institut, Mannheim 1972.
- /37/ SCHÜSSLER, W.: Digitale Systeme zur Signalverarbeitung. Springer, Berlin 1973.
- /38/* SCHWARTZ, M. & L. SHAW: Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection, and Estimation. McGraw-Hill, New York 1975.
- /39/ UNBEHAUEN, R.: Systemtheorie. Oldenbourg, München 1980.
- /40/ VAN TREES, H.L.: Detection, Estimation, and Modulation Theory. John Wiley, New York 1968.
- /41/ WOLD, H.: A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1954.
- /42/* YUEN, C.K. & D. FRASER: Digital Spectral Analysis. Pitman, London 1979.
- /43/ ZEMANEK, H.: Elementare Informationstheorie. Oldenbourg, München, 1959.
- /44/ ZURMOHL, R.: Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer, Berlin 1964.

Anthologien und Übersichtsbeiträge

- /45/ BINGHAM, C., M.D. GODFREY & J.W. TUKEY: Modern Techniques of Power Spectrum Estimation. IEEE Trans., AU-15(1967), 56.
- /46/ CHILDERS, D.G. (Ed.): Modern Spectrum Analysis. IEEE Press, New York 1978.
- /47/* HARRIS, B. (Ed.): Spectral Analysis of Time Series. John Wiley, New York 1967.
- /48/ HAYKIN, S. (Ed.): Nonlinear Methods of Spectral Analysis. Springer, Berlin, New York 1979.
- /49/ HAYKIN, S. & J.A. CADZOW (Ed.): Special Issul on Spectral Estimation. Proc. IEEE, 70(1982), 883.
- /50/ KAY, S.M. & S.L. MARPLE: Spectrum Analysis - A Modern Perspective. Proc. IEEE, 69(1981), 1380.
- /51/* PARZEN, E.: Time Series Analysis Papers. Holden Day, San Francisco 1967.
- /52/ ROBINSON, E.A.: A Historical Perspective of Spectrum Estimation. Proc. IEEE, 70(1982), 885.

Historische Arbeiten

- /53/ BACHELIER, Théorie de la spéculation. Ann. de l'École Normale, 17(1900), 21.
- /54/ ———: Les probabilités à plusieurs variables. Ann. de l'École Normale, 27(1910), 339.
- /55/ BARTELS, J.: Periodicities and Harmonic Analysis in Geophysics. Geomagnetism, Bd.2, Oxford University Press, Oxford 1940.
- /56/ BURKHARD, H.: Trigonometrische Interpolation, Enzykl. math. Wiss., Bd.II, Teil 1(1904), 642.
- /57/ CARSON, J.R.: Selective Circuits and Static Interference. Bell System Techn. J., 4(1925), 265.
- /58/ ———: The Statistical Energy-Frequency Spectrum of Random Disturbances. Bell System Techn. J., 10(1931), 374-381.

- /59/ CRAMÉR, H.: On Harmonic Analysis in Certain Functional Spaces.
Ark. Math. Astr. Fys., 28B(1942), 1.
- /60/ DANIELL, P.J.: Discussion on "Symposium on Autocorrelation in Time Series". J. Roy.Stat.Soc., Suppl.8(1946), 88.
- /61/ DES COUDRES, T.: Theoretische Grundlagen für einen harmonischen Wechselstromanalysator. Verhandlungen der phys. Gesellschaft in Berlin, 1898, 129.
- /62/ EINSTEIN, A.: Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Ann. Phys., 19 (1906), 371.
- /63/* FISHER, R.A.: Test of Significance in Harmonic Analysis. Proc. Roy. Soc., Ser.A, 125(1929), 54.
- /64/ GAUSS, C.F.: Theorie der Bewegung der Himmelskörper, welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen. Übersetzung des lateinischen Originals von 1809. Carl Meyer, Hannover 1865.
- /65/ GRÖTZMACHER, M.: Eine neue Methode der Klanganalyse. Elektrische Nachrichten-Technik, 4(1927), 533.
- /66/ JAMES, H.M., N.B. NICHOLS & R.S. PHILLIPS: Theory of Servomechanisms. McGraw.Hill, New York 1947.
- /67/ KENDALL, D.G.: Oscillatory Time-Series (Buchbesprechung). Nature, 161(1948), 187.
- /68/ KENRICK, G.W.: The Analysis of Irregular Motions with Applications to the Energy Frequency Spectrum of Static and of Telegraph Signals. Phil.Mag.Ser. 7, 7(1929), 176.
- /69/ KHINTCHINE, A.J.: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. Math. Annalen, 109(1934), 604.
- /70/ KIRCHHOFF, G. & R. BUNSEN: Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen. Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, 110(1860), 161.
- /71/ KOLMOGOROV, A.N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebn. Math. u. Grenzgebiete, 2(1933), Nr. 3.
- /72/ NEWTON, I.: Optics. Innays, London 1730.
- /73/ PUPIN, M.I.: Resonance Analysis of Alternating and Polyphase Currents. Trans. AIEE, 9(1894), 523.

- /74/ RICE, S.O.: Mathematical Analysis of Random Noise. In: Selected Papers on Noise and Stochastic Processes. Dover, New York 1954.
- /75/ SALINGER, H.: Zur Theorie der Frequenzanalyse mittels Suchtones. Elektrische Nachrichten-Technik, 6(1929), 293.
- /76/ SCHUSTER, A.: On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed 26-Day Period of Meteorological Phenomena. Terrestrial Magnetism, 3(1898), 13.
- /77/ ———: The Periodogram of the Magnetic Declination as Obtained from the Records of the Greenwich Observatory During the Years 1871-1895. Trans.Cambridge Phil. Soc., 18(1900), 107.
- /78/ ———: The Periodogram and its Optical Analogy. Proc. Roy. Soc., Ser.A, 77(1906), 136.
- /79/ SLUTSKY, E.: Die Addition zufälliger Ursachen als Quelle zyklischer Prozesse (i.russ.). Konjunkturfragen, 3(1927), 34. Engl. Übersetzung in: Econometrika, 5(1937), 105.
- /80/ SMOLUCHOWSKI, M.: Abhandlungen über die Brownsche Bewegung und verwandte Erscheinungen. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 207, Leipzig 1923.
- /81/ STOKES, G.C.: Note on Searching for Periodicities. Proc. Roy. Soc., 29(1879), 122.
- /82/ STUMPF, K.: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Springer, Berlin 1937.
- /83/ TAYLOR, G.I.: Diffusion by Continous Movement. Proc. London Math. Soc., Ser.2, 20(1920), 196.
- /84/* ———: The Spectrum of Turbulence. Proc. Roy. Soc., Ser.A, 164(1938), 476.
- /85/ WALKER, G.: On Periodicity in Series of Related Terms. Proc. Roy. Soc., Ser.A, 131(1931), 518-532.
- /86/ WIENER, N.: Differential Space. J. Math.Phys.,2(1923), 131.
- /87/ ———: The Quadratic Variation of a Function and its Fourier Coefficients. M.I.T. Bulletin, Dep. Math., Ser.2,75(1924).
- /88/ ———: Generalized Harmonic Analysis. Acta Math., 55(1930), 117.

- /89/ —: The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series. John Wiley, New York 1949.
- /90/ YULE, G.U.: On the Time-Correlation Problem, with Especial Reference to the Variate-Difference Correlation Method. J. Roy. Stat. Soc., 84 (1921), 497.
- /91/ —: On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. Phil. Trans. Roy. Soc., Ser.A, 226(1927), 267.

Analoge Spektralschätzverfahren

- /92/ * BAJIĆ, B.: Dynamics of the Heterodyne Spectrum Analyzer with Rectangular Bandpass Filter. IEEE Trans., IM-30(1981), 157.
- /93/ * BARBER, N.F.: Experimental Correlograms and Fourier-Transforms. Pergamon Press, Oxford 1961.
- /94/ BENDAT, J.B. & A.G. PERSOL: Design Considerations and Use of Analog Power Spectral Density Analyzers. Techn. Rep., Minneapolis-Honeywell Regulator Comp., Denver 1964.
- /95/ * CHANG, S.S.: An Ocean Wave Power Spectrum Analyzer. Proc. Nat. Electron. Conf., 10(1954), 349.
- /96/ * —: On the Filter Problem of the Power-Spectrum Analyzer. Proc. IRE, 42(1954), 1278.
- /97/ DAVENPORT, W.B., R.A. JOHNSON & D. MIDDLETON: Statistical Errors in Measurement on Random Time Functions. J. Appl. Phys., 23 (1952), 377.
- /98/ DI PILLO, G., G. KOCH & R. MARANO: A Hybrid Method for Cross-Power Spectral Density Estimation. IEEE Trans., AC-14(1969), 771.
- /99/ —: On the Analogue Methods for Power Spectral Density Estimation. Intern. J. Control, 11(1970), 759.
- /100/ DITTRICH, F.: Verschiedene Definitionen der spektralen Leistungsdichte stationärer stochastischer Signale und Diskussion der auftretenden Konvergenzprobleme. Messen - Steuern - Regeln, 13(1970), 260 u. 356.
- /101/ * GAUSS, E.J.: Estimation of Power Spectral Density by Filters. J. Ass. Comp. Mach. 11(1964), 98.

- /102/* GILCHRIST, J.H.: The Short-Time Behavior of a Frequency-Warping Power Spectral Estimator, IEEE Trans., ASSP-28 (1980), 176.
- /103/ HALL, G.: Meßtechnische Untersuchung der Streuung von Leistungsdichtemessungen. Studienarbeit, Inst.f. Regelungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg 1978.
- /104/* LIN, L.T. u.a.: A Monolithic Audio Spectrum Analyzer. IEEE Trans., ASSP-31(1983), 288.
- /105/* MEYER-BRÖTZ, G.: Die Messung von Kenngrößen stochastischer Prozesse mit dem elektronischen Analogrechner. Elektron. Rechenanlagen, 4 (1962), 103.
- /106/* PRIESTLEY, M.B. & C.H. GIBSON: Estimation of Power Spectra by a Wave-Analyzer. Technometrics, 4(1965), 553.
- /107/ SCHIPPER, G.: Untersuchungen zur statistischen Linearisierung von Nichtlinearitäten mit mehrdeutigen Kennlinien. Diplomarbeit, Inst.f. Regelungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg 1976.
- /108/ SCHOEPS, K.: Beitrag zur Theorie und Technik der Frequenzanalyse mit Suchton. Hochfrequenz u. Elektroakustik, 49(1937), 184.
- /109/* SCOTT, H.H.: The Degenerative Sound Analyzer. J. Acoust. Soc. Am., 11(1939), 225.
- /110/* SELTZER, J.L. & D.T. McRUER: Survey of Analog Cross-spectral Analyzers. Whright Air Development Center, Techn. Rep. 59-241, Ohio 1959.
- /111/* SPETNER, L.M.: Errors in Power Spectra Due to Finite Sample. J. Appl.Phys., 25(1954), 653.
- /112/* STEINBACH, S.: Ein schnell arbeitender Suchton-Spektrograf für den Sprachfrequenzbereich. Nachrichtentechnik, 6(1956), 365.
- /113/ UBEROI, M.S. & E.G. GILBERT: Technique for Measurement of Cross-spectral Density of two Random Functions. Rev. Scient. Instr., 30 (1959), 176.
- /114/ WEIGEL, A.: Aufbau und Untersuchung eines hybrid realisierten Kreuzleistungsspektrometers. Studienarbeit, Inst. f. Regelungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg 1978.

BLACKMAN-TUKEY- und Periodogrammschätzwerte

- /115/ BARTLETT, M.S.: Smoothing Periodograms from Time-Series with Continuous Spectra. *Nature*, 161(1948), 686.
- /116/ ———: Periodogramm Analysis and Continuous Spectra. *Biometrika*, 37 (1950), 1.
- /117/* BARTLETT, M.S. & J. MEHDI: On the Efficiency of Procedures for Smoothing Periodograms from Given Time Series with Continuous Spectra. *Biometrika*, 42(1955), 143.
- /118/ BLACKMAN, R.B. & J.W. TUKEY: The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering. Dover, New York 1959.
- /119/* COOLEY, J.W., P.A.W. LEWIS & P.D. WELCH: The Application of the Fast Fourier Transform Algorithm to the Estimation of Spectra and Cross-spectra. *J. Sound Vibration*, 12(1970), 339.
- /120/* DANIELS, H.E.: The Estimation of Spectral Densities. *J. Roy. Stat. Soc., Ser.B*, 24(1962), 185.
- /121/* EDGE, B.L. & P.C. LIU: Comparing Power Spectra Computed by Blackman-Tukey and Fast Fourier Transform. *Water Resources Research*, 6 (1970), 1601.
- /122/ GOODMAN, N.R.: Some Comments of Spectral Analysis of Time Series. *Technometrics*, 3(1961), 221.
- /123/ GRENANDER, U.: On Empirical Spectral Analysis of Stochastic Processes, *Ark. Math.* 1(1951), 503.
- /124/* ———: Bandwith and Variance in the Estimation of the Spectrum. *J. Roy. Stat.Soc., Ser.B*, 20(1958), 152.
- /125/* HANNAN, E.J.: The Estimation of the Spectral Density after Trend Removal. *J. Roy. Stat. Soc., Ser.B*, 20(1958), 323.
- /126/* HUNG, E.K.L. & R.W. HERRING: Simulation Experiments to Compare the Signal Detection Properties of DFT and MEM Spectra. *IEEE Trans., ASSP*-29(1981), 1084.
- /127/ JENKINS, G.M.: General Considerations in the Analysis of Spectra. *Technometrics*, 3(1961), 133.

- /128/* ———: A Survey of Spectral Analysis. J. Roy. Stat. Soc. Ser.C, 14 (1965), 2.
- /129/* JENKINS, G.M. & M.B. PRIESTLEY: The Spectral Analysis of Time Series. J. Roy. Stat. Soc., Ser.B, 19(1957), 1.
- /130/ JONES, R.H.: A Reappraisal of the Periodogram in Spectral Analysis. Technometrics, 7(1965), 531.
- /131/ LOMNICKI, Z.A. & S.K. ZAREMBA: On Estimating the Spectral Density Function of a Stochastic Process. J. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 19 (1957), 13.
- /132/ ———: Bandwith and Resolvability in Statistical Spectral Analysis. J. Roy. Stat. Soc., Ser.B, 21(1959), 169.
- /133/* MARKS, W. & W.J. PIERSON: The Power Spectrum Analysis of Ocean-Wave Records. Trans. Am. Geophys. Union, 33(1952), 834.
- /134/ PARZEN, E.: On Choosing an Estimate of the Spectral Density Function of a Stationary Time Series, Ann. Math. Sta., 28(1957), 921.
- /135/ ———: On Asymptotically Efficient Consistent Estimates of the Spectral Density Function of a Stationary Time Series. J. Roy. Stat.Soc., Ser.B, 20(1958), 303.
- /136/ ———: Mathematical Considerations in the Estimation of Spectra. Technometrics, 3(1961), 167.
- /137/* ———: On Statistical Spectral Analysis. Proc. Symposium in Applied Mathematics. Ed.: R. BELLMAN. Am. Math. Soc., New York 1964.
- /138/ ———: Statistical Spectral Analysis (Single Channel Case) in 1968. Stanford University, Rep. TR-11, Stanford 1968.
- /139/ PRIESTLEY, M.B.: Basic Considerations in the Estimation of Spectra. Technometrics, 4(1962), 551.
- /140/* ———: The Role of Bandwith in Spectral Analysis. J. Roy. Stat. Soc., Ser.C, 14(1965), 33.
- /141/* SLOANE, E.A.: Comparison of Linearly and Quadratically Modified Spectral Estimates of Gaussian Signals. IEEE Trans., AU-17 (1969), 133.
- /142/ TUKEY, J.W.: The Sampling Theory of Power Spectrum Estimates. Symposium on Applications of Autocorrelation Analysis to Physical Problems. Woods Hole, 1949.

- /143/ ———: An Introduction to the Measurement of Spectra. In: Probability and Statistics: The Harold Cramér Volume, 300. John Wiley, New York 1959.
- /144/ ———: Discussion, Emphasizing the Connection Between Analysis of Variance and Spectrum Analysis. Technometrics, 3(1961), 191.
- /145/ ———: An Introduction to the Calculations of Numerical Spectrum Analysis. In: Spectral Analysis of Time Series. Ed.: B. HARRIS, vgl. /47/(1967), 25.
- /146/* VAN SCHOONEVELD, C. & P.J.A. PRINSEN: Spectrum Analysis. In: Aspects of Signal Processing, Teil 2, Ed.: G. TACCONI, 563. D. Reidel, Dordrecht 1977.
- /147/ VAN SCHOONEVELD, C. & D.J. FRIJLING: Spectral Analysis: On the Usefulness of Linear Tapering for Leakage Suppression. IEEE Trans., ASSP-29(1981), 323.
- /148/* WHITTLE, P.: Curve and Periodogram Smoothing. J. Roy. Stat. Soc., Ser.B, 19(1957), 38.
- /149/ YUEN, C.K.: Comments on Modern Methods for Spectrum Estimation. IEEE Trans., ASSP-27(1979), 298.
- /150/* — — —: On the Smoothed Periodogram Method for Spectrum Estimation. Signal Processing, 1(1979), 83.

WELCH-BARTLETT-Methode

- /151/ CARTER, C.G. & A.H. NUTTALL: On the Weighted Overlapped Segment Averaging Method for Power Spectral Estimation. Proc. IEEE, 68(1980), 1352.
- /152/* ———: A Brief Summary of a Generalized Framework for Power spectral estimation. Signal Processing, 2(1980), 387.
- /153/* DYSON, T. & S.S. RAO: Equal Observation Interval Comparison of Maximum Entropy and Weighted Overlapped Segment Averaging Spectrum Estimation Techniques. Trans. IEEE, ASSP-29(1981), 919.
- /154/ NUTTALL, A.H.: Spectral Estimation of Means of Overlapped Fast Fourier Transform Processing of Windowed Data. Naval Underwater Systems Center, Rep. 4169, New London 1971.

- /155/* ———: Spectral Analysis Via Quadratic Frequency Smoothing of Fourier-Transformed Overlapped, Weighted Data Segments. Naval Underwater Systems Center, Rep. 6459, New London 1981.
- /156/ NUTTALL, A.H. & C.G. CARTER: Spectral Estimation Using Combined Time and Lag Weighting. Proc. IEEE, 70(1982), 1115.
- /157/ THIELECKE, J.: Untersuchung eines Spektralschätzverfahrens auf der Grundlage segmentierter und zeitgewichteter Daten. Studienarbeit, Inst.f. Regelungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg 1984.
- /158/ WELCH, P.D.: The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging over Short, Modified Periodograms. Trans IEEE, AU-15(1967), 70.
- /159/* ———: On the Variance of Time and Frequency Averages over Modified Periodograms. Rec. 1977 IEEE Int. Conf. Acoustic, Speech, and Signal Processing, 58. Hartford, May 9-11, 1977.
- /160/* YUEN, C.K.: A Comparison of Five Methods for Computing the Power Spectrum of a Random Process Using Data Segmentation. Proc. IEEE, 65 (1977), 984.
- /161/* ———: Quadratic Windowing in the Segment Averaging Method for Power Spectrum Computation. Technometrics, 20(1978), 195.

Sonstige Beiträge zu den nichtparametrischen Verfahren

- /162/* BERTRAN-SALVANS, M.: A Generalized Window Approach to Spectral Estimation. IEEE Trans. ASSP-32(1984), 7.
- /163/* BOGERT, B.P.: Informal Comments on the Uses of Power Spectrum Analysis. IEEE Trans., AU-15(1967), 74.
- /164/* BRILLINGER, D.R.: Fourier Analysis of Stationary Processes. Proc. IEEE, 62(1974), 1628.
- /165/ ———: The Key Role of Tapering in Spectrum Estimation. IEEE Trans., ASSP-29(1981), 1075.
- /166/* DURRANI, T.S. & J.M. NIGHTINGALE: Data Windows for Digital Spectral Analysis. Proc. IEE, 119(1972), 343.
- /167/* EBERHARD, A.: An Optimum Discrete Window for the Calculation of Power Spectra. IEEE Trans., ASSP-21(1973), 37.

- /168/ HARRIS, F.J.: On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform. Proc. IEEE, 66(1978), 51.
- /169/ JONES, R.H.: Spectrum Estimation with Missing Observations. Ann. Inst. Stat. Math., 23(1971), 387.
- /170/ KAISER, J.F. & R.W. SCHAFER: On the Use of the I_0 -Sinh Window for Spectrum Analysis. IEEE Trans., ASSP-28(1980), 105.
- /171/* NITZBERG, R.: Spectral Estimation: An Impossibility? Proc. IEEE, 67(1979), 437.
- /172/* NUTTALL, A.H.: Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior. IEEE Trans., ASSP-29(1981), 84.
- /173/* ———: A Two-Parameter Class of Bessel Weightings for Spectral Analysis or Array Processing - The Ideal Weighting - Window Pairs. IEEE Trans., ASSP-31(1983), 1309.
- /174/ PAPOULIS, A.: Minimum-Bias Windows for High Resolution Spectral Estimates. IEEE Trans., IT-19(1973), 9.
- /175/* THOMSON, D.J.: Spectrum Estimation and Harmonic Analysis. Proc. IEEE, 70(1982), 1055.
- /176/* THOMSON, D.J. u.a.: Spectral Windowing Techniques in Power Spectral Analyses of Geomagnetic Data. Phys. Earth Planetary Interiors, 12(1976), 217.
- /177/* WATTS, D.G.: Optimal Windows for Power-spectra Estimation. Math. Research Center, University of Wisconsin, Rep. 506(1964).
- /178/* WEBSTER, R.J.: Leakage Regulation in the Discrete Fourier Transform Spectrum. Proc. IEEE, 68(1980), 1339.
- /179/* WONNACOTT, T.H.: Spectral Analysis Combining a Bartlett Window with an Associated Inner Window. Technometrics, 3(1961), 235.

Maximum-Entropie- und AR - Schätzverfahren

- /180/ ABLES, J.G.: Maximum Entropy Analysis. Astronomy and Astrophysics Suppl. Ser., 15(1974), 383.
- /181/ AKAIKE, H.: Power Spectrum Estimation through Autoregressive Model Fitting. Ann. Inst. Stat. Math., 21(1969), 407.

- /182/ ANDERSEN, N.O.: On the Calculation of Filter Coefficients for Maximum Entropy Spectral Analysis. *Geophys.*, 39(1974), 69.
- /183/ BURG, J.P.: Maximum Entropy Spectral Analysis. *Proc. 37th Meeting Soc. Exploration Geophysicists*, 1967.
- /184/ ———: A New Analysis Technique for Time Series Data. *NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics*, Enschede, 1968.
- /185/* ———: Maximum Entropy Spectral Analysis. Ph.D. Thesis, Stanford University, 1975.
- /186/* BYRNE, C.L. & R.M. FITZGERALD: An Approximation Approach to Maximum Entropy Spectral Analysis. *IEEE Trans.*, ASSP-31(1983), 734.
- /187/* DUBROFF, R.E.: The Effective Autocorrelation Function of Maximum Entropy Spectra. *Proc. IEEE*, 63(1975), 1622.
- /188/* EDWARD, J.A. & M.M. FITELSON: Notes on Maximum Entropy Processing. *IEEE Trans.*, IT-19(1973), 232.
- /189/* GERSCH, W.: Spectral Analysis of EEG's by Autoregressive Decomposition of Time Series. *Math. Biosci.*, 7(1970), 205.
- /190/* GERSCH, W. & D.R. SHARPE: Estimation of Power Spectra with Finite Order Autoregressive Models. *IEEE Trans.*, AC-18(1973), 367.
- /191/* GRIFFITHS, L.J. & R. PRIETO-DIAZ: Spectral Analysis of Natural Seismic Events Using Autoregressive Techniques. *IEEE Trans.*, GE-15(1977), 13.
- /192/ HAYKIN, S. & S. KESLER: Prediction-Error Filtering and Maximum Entropy Spectral Estimation. In: *Nonlinear Methods of Spectral Analysis*. Ed.: S. HAYKIN, vgl./48/(1979), 9.
- /193/* JONES, R.H.: Identification and Autoregressive Spectrum Estimation. *IEEE Trans.*, AC-19(1974), 894.
- /194/* KAVEH, M. & G.R. COOPER: An Empirical Investigation of the Properties of the Autoregressive Spectral Estimator. *IEEE Trans.*, IT-22(1976), 313.
- /195/* KAY, S.M.: The Effects of Noise on the Autoregressive Spectral Estimator. *IEEE Trans.*, ASSP-27(1979), 478.

- /196/ ———: Noise Compensation for Autoregressive Spectral Estimation. IEEE Trans., ASSP-28(1980), 292.
- /197/* KESLER, S. & S. HAYKIN: The Maximum Entropy Method Applied to the Spectral Analysis of Radar Clutter. IEEE Trans., IT-24 (1978), 269.
- /198/* LAGUNAS-HERNANDEZ, M.A.: Use of the Most Significant Autocorrelation Lags in Iterative ME Spectral Estimation. IEEE Trans., ASSP-32(1984), 445.
- /199/ MARPLE, L.S.: A New Autoregressive Spectrum Analysis Algorithm. IEEE Trans., ASSP-28(1980), 441.
- /200/ NUTTALL, A.H.: Spectral Analysis of a Univariate Process with Bad Data Points, via Maximum Entropy and Linear Predictive Techniques. Naval Underwater Systems Center, Rep. 5303, New London 1976.
- /201/ PAPOULIS, A.: Maximum Entropy and Spectral Estimation: A Review. IEEE Trans., ASSP-29(1981), 1176.
- /202/* QUIRK, M.P. & B. LIU: Improving Resolution for Autoregressive Spectral Estimation by Decimation. IEEE Trans., ASSP-31(1983), 630.
- /203/ TREITEL, S. u.a.: Empirical Spectral Analysis Revisited. In: Topics in Numerical Analysis, Ed.: J.H. MILLER, 429. Academic Press, New York 1977.
- /204/ ULRYCH, T.J. & T.N. BISHOP: Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition. Rev. Geophys. Spacephys. 13(1975), 183.
- /205/ ULRYCH, T.J. & R.W. CLAYTON: Time Series Modeling and Maximum Entropy. Phys. Earth and Planetary Interiors, 12(1976), 188.
- /206/ ULRYCH, T.J. & M. OOE: Autoregressive and Mixed Autoregressive-Moving Average Models and Spectra. In: Nonlinear Methods of Spectral Analysis. Ed.: S. HAYKIN, vgl./48/(1979), 73.
- /207/ VAN DEN BOS, A.: Alternative Interpretation of Maximum Entropy Spectral Analysis. IEEE Trans., IT-17(1971), 493.

Modellordnung und statistische Eigenschaften

- /208/ AKAIKE, H.: Fitting Autoregressive Models for Prediction. Ann.Inst. Stat. Math., 21(1969), 243.
- /209/ ———: Statistical Predictor Identification. Ann. Inst. Stat. Math., 22(1970), 203.
- /210/ ———: Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. Proc. 2. Int. Symp. Information Theory. Ed.: B.N. PETROV & F. CSAKI, Budapest 1973.
- /211/ ———: A New Look at the Statistical Model Identification. IEEE Trans., AC-19(1974), 716.
- /212/* BAGGEROER, A.B.: Confidence Intervals for Regression (MEM) Spectral Estimates. IEEE Trans., IT-22(1976), 534.
- /213/ BERK, K.N.: Consistent Autoregressive Spectral Estimates. Ann. Statistics, 2(1974), 489.
- /214/* BERRYMAN, J.G.: Choice of Operator Length for Maximum Entropy Spectral Analysis. Geophys., 43(1978), 1384.
- /215/* CHAN, Y.T. & J.C. WOOD: A New Order Determination Technique for ARMA Processes. IEEE Trans., ASSP-32(1984), 517.
- /216/ CHOW, J.C.: On the Estimation of the Order of a Moving-Average Process. IEEE Trans., AC-17(1972), 386.
- /217/ ———: On Estimating the Orders of an Autoregressive Moving-Average Process with Uncertain Observations. IEEE Trans., AC-17(1972), 707.
- /218/ DAVIS, H.T. & R.H. JONES: Estimation of the Innovation Variance of a Stationary Time Series. J. Am. Stat. Ass., 63(1968), 141.
- /219/ DAVISSON, L.D.: The Prediction Error of Stationary Gaussian Time Series of Unknown Covariance. IEEE Trans., IT-11(1965), 527.
- /220/ ———: A Theory of Adaptive Filtering. IEEE Trans., IT-12(1966), 97.
- /221/ JONES, R.H.: Autoregression Order Selection. Geophys., 41(1976), 771.
- /222/ KROMER, R.E.: Asymptotic Properties of the Autoregressive Spectral Estimator. Ph. D. Thesis, Stanford University, 1970.
- /223/ MALLOWS, C.L.: Some Comments on C_p . Technometrics, 15(1973), 661.

- /224/ PARZEN, E.: Some Recent Advances in Time Series Modeling. IEEE Trans., AC-19(1974), 723.
- /225/ ———: Multiple Time Series: Determining the Order of Approximating Autoregressive Schemes. Rep. 23, Stat.sci. Div., State University New York at Buffalo, 1976.
- /226/* SAKAI, H.: Statistical Properties of AR Spectral Analysis. IEEE Trans., ASSP-27(1979), 402.
- /227/* SAKAI, H. & H. TOKUMARU: Statistical Analysis of a Spectral Estimator for ARMA Processes. IEEE Trans., AC-25(1980), 122.
- /228/* SHIBATA, R.: Selection of the Order of an Autoregressive Model by Akaike's Information Criterion. Biometrika, 63(1976), 117.
- /229/* TONG, H.: Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike's Information Criterion. IEEE Trans., IT-21(1975), 476.
- /230/* ———: More on Autoregressive Model Fitting with Noisy Data by Akaike's Information Criterion. IEEE Trans., IT-23(1977), 409.

ARMA-Verfahren und sonstige Beiträge

- /231/ BERKHOUT, A.J. & P.R. ZAAZEN: A Comparison between Wiener Filtering, Kalman Filtering, and Deterministic Least Squares Estimation. Geophys. Prospecting, 24(1976), 141.
- /232/* BERNHARD, W. & B. HILLER: Spektralanalyse als Identifikationsproblem. Regelungstechnik, 30(1982), 393 u. 422.
- /233/* BRUZZONE, S. & M. KAVEH: On some Suboptimum ARMA Spectral Estimator. IEEE Trans., ASSP-28(1980), 753.
- /234/ BURG, J.P.: The Relationship between Maximum Entropy Spectra and Maximum Likelihood Spectra. Geophysics, 37(1972), 375.
- /235/ CADZOW, J.A.: High Performance Spectral Estimation - A New ARMA Method. IEEE Trans., ASSP-28(1980), 524.
- /236/* ———: Autoregressive Moving Average Spectral Estimation. A Model Equation Error Procedure. IEEE Trans., GE-19(1981), 24.
- /237/* ———: Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach. Proc. IEEE, 70(1982), 907.

- /238/ ———: ARMA Time Series Modeling: An Effective Method. IEEE Trans., AES-19(1983), 49.
- /239/ CAPON, J.: High - Resolution Frequency - Wavenumber Spectrum Analysis. Proc. IEEE, 57(1969), 1408.
- /240/* FRIEDLANDER, B.: A Recursive Maximum-Likelihood Algorithm for ARMA Spectral Estimation. IEEE Trans., IT-28(1982), 639.
- /241/* ———: Lattice Methods for Spectral Estimation. Proc. IEEE, 70(1982), 990.
- /242/* ———: A Lattice - Algorithm for Factoring the Spectrum of a Moving - Average Process. IEEE Trans., AC-28(1983), 1051.
- /243/* ———: Instrumental Variable Methods for ARMA Spectral Estimation. IEEE Trans., ASSP-31(1983), 404.
- /244/ FRIEDLANDER, B. u.a.: New Inversion Formulas for Matrices Classified in Terms of Their Distance from Toeplitz Matrices. Linear Algebra and Its Applications, 27(1979), 31.
- /245/* FRIEDLANDER, B. & PORAT: A Spectral Matching Technique for ARMA Parameter Estimation. IEEE Trans., ASSP-32(1984), 338.
- /246/ FROST, O.L.: Power-Spectrum Estimation. In: Aspects of Signal Processing, Teil 1, 125. Ed.: G. TACCONI, D. Reidel, Dordrecht 1977.
- /247/* GAN, R.G. u.a.: An Extended FFT Algorithm for ARMA Spectral Estimation. IEEE Trans., ASSP-32(1984), 168.
- /248/* GERSCH, W.: Estimation of the Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving-Average Time Series. IEEE Trans., AC-15(1970), 583.
- /249/* GRAUPE, D. u.a.: Identification of Autoregressive Moving-Average Parameters of Time Series. IEEE Trans., AC-20(1975), 104.
- /250/ GUTOWSKI, P.R. u.a.: Spectral Estimation: Fact or Fiction. IEEE Trans., GE.16(1978), 80.
- /251/* KAVEH, M.: High Resolution Spectral Estimation for Noisy Signals. IEEE Trans., ASSP-27(1979), 286.
- /252/ KAY, S.M.: A New ARMA Spectral Estimator. IEEE Trans., ASSP-28(1980), 585.

- /253/ * KINKEL, J.F. u.a.: A Note on Covariance-Invariant Digital Filter Design and ARMA Spectrum Analysis. IEEE Trans., ASSP-27(1979), 200.
- /254/ LACOSS, R.T.: Data Adaptive Spectral Analysis Methods. Geophysic, 36 (1971), 661.
- /255/ * ———: Autoregressive and Maximum Likelihood Spectral Analysis Methods. In: Aspects of Signal Processing, Teil 2, 591. Ed.: G. TACCO-NI, D. Reidel, Dordrecht 1977.
- /256/ LANDERS, T.E. & R.T. LACOSS: Some Geophysical Applications of Autoregressive Spectral Estimates. IEEE Trans., GE-15(1977), 26.
- /257/ * LEE, D. u.a.: Recursive Ladder Algorithms for ARMA Modelling. IEEE Trans., AC-27(1982), 753.
- /258/ MARPLE, L.S.: Resolution of Conventional Fourier, and Autoregressive, and Special ARMA Methods of Spectrum Analysis. Rec. 1977 IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 74. Hartford 1977.
- /259/ MORF, M. u.a.: A Classification of Algorithms for ARMA Models and Ladder Realizations. Rec. 1977 IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 13. Hartford 1977.
- /260/ MORF, M. u.a.: Efficient Solution of Covariance Equations for Linear Prediction. IEEE Trans., ASSP-25(1977), 429.
- /261/ SAUERWEIN, R.: Experimenteller Vergleich von "digitalen" Spektralschätzverfahren. Studienarbeit, Inst. f. Regelungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg 1983.
- /262/ TONG, H.: Fitting a Smooth Moving Average to Noisy Data. IEEE Trans., IT-22(1976), 493.

Ergänzende Beiträge

- /263/ ÅSTRÖM, K.J. & P. EYKHOFF: System Identification - A Survey. Automatica, 7(1971), 123.
- /264/ BÄR, W. & F. DITTRICH: Zur Berechnung von Momenten nichtmittelwertfreier Zufallsvektoren mit normaler Verbundverteilung. Regelungstechnik, 19(1971), 207.
- /265/ BARTLETT, M.S.: On the Theoretical Specification and Sampling Properties of Autocorrelated Time Series. J. Roy. Stat. Soc., Suppl.8 (1946), 27.

- /266/ COOLEY, J.W. u.a. Historical Notes on the Fast Fourier Transform. IEEE Trans., AU-15(1967), 76.
- /267/ COOLEY, J.W. & J.W. TUKEY: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Math. Comput., 19(1965), 297.
- /268/ DURBIN, J.: The Fitting of Time Series Models. Rev. Int. Inst. Stat., 28(1960), 233.
- /269/ FAST, J.D. & F.L. STUMPERS: Entropie in Wissenschaft und Technik. Philips techn.Rundsch., 16 (1954/55), 277, 315 u. 339; 18 (1956/57), 164.
- /270/ GODFREY, M.D.: An Exploratory Study of the Bispectrum of Economic Time Series. J. Roy. Sta. Soc., Ser.C, 14(1965), 48.
- /271/ HOERMANN, H.A.: Direkte Digitale Abschätzung von Leistungsdichtespektren an Kernreaktoren. Regelungstechnik, 22(1974), 11.
- /272/ ISSERLIS, L.: On a Formula for the Product-Moment Coefficient of Any Order of a Normal Frequency Distribution in Any Number of Variables. Biometrika, 12(1918), 134.
- /273/* JAYNES, E.T.: On the Rationale of Maximum-Entropy Methods. Proc. IEEE, 70(1982), 939.
- /274/* JERRI, A.J.: The Shannon Sampling Theorem, Its Various Extensions and Applications: a Tutorial Review. Proc. IEEE, 65(1977), 1565.
- /275/ KAWATA, T.: Some Convergence Theorems for Stationary Stochastic Processes. Ann. Math. Stat., 32(1961), 1192.
- /276/ KNAUS, G.: Ein digitales Spektralschätzverfahren auf der Grundlage der Poisson-Abtastung. Studienarbeit, Inst. f. Regelungstechnik, Universität Erlangen-Nürnberg, 1983.
- /277/ KÖNIG, H. & J. WOLTERS: Einführung in die Spektralanalyse ökonomischer Zeitreihen. A. Hain, Meisenheim 1972.
- /278/ LANDERS, T.E. & M.A. CHINNERY: Spectra from Two Months to Two Years of Regional Earthquake Occurrence Rates. Seismic Discrimination Semiann. Techn. Sum., Lincoln Lab., M.I.T. (1975), 57.
- /279/ LEVINSON, N.: The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction. J. Math. Phys., 25 (1947), 261.

- /280/ MARKHOUL, J.: Linear Prediction: A Tutorial Review. Proc. IEEE, 63 (1975), 561.
- /281/ ———: Stable and Efficient Lattice Methods for Linear Prediction. IEEE Trans., ASSP-25(1977), 423.
- /282/ Markt & Technik, Heft 13 (1983), Haar bei München 1983.
- /283/ MASRY, E.: Poisson Sampling and Spectral Estimation of Continuous-Time Processes. IEEE Trans., IT-24 (1978), 173.
- /284/ NAEVE, P.: Spektralanalytische Methoden zur Analyse von ökonomischen Zeitreihen. Physica-Verlag, Würzburg, 1969.
- /285/ PERL, J. & L.L. SCHARF: Covariance-Invariant Digital Filtering. IEEE Trans., ASSP-25 (1977), 143.
- /286/ PISARENKO, V.F.: The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function. Geoph. J. Roy. Astron. Soc., 33(1973), 347.
- /287/ * RADER, C.M.: An Improved Algorithm for High Speed Autocorrelation with Application to Spectral Estimation. IEEE Trans., Au-18(1970), 439.
- /288/ SCHAEFER, M.C.: Estimation of the Covariance and Autoregressive Structure of a Stationary Time Series. Ph.D. Thesis, Stanford University 1963.
- /289/ SCHÖSSLER, W.: Digitale Signalverarbeitung I. Skriptum, Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Universität Erlangen-Nürnberg 1982.
- /290/ SHANNON, C.E.: A Mathematical Theory of Communication. Bell System Techn. J., 27 (1948), 379 u. 626.
- /291/ SLEPIAN, D. u.a.: Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty I. Bell System Techn. J., 40 (1961), 43.
- /292/ SMYLLIE, D.E. u.a.: Analysis of Irregularities in the Earth's Rotation. Methods Comp. Phys., 13 (1973), 391.
- /293/ SULLIVAN, T.M. u.a.: High Resolution Signal Estimation. ARGO Systems, Int. Rep. Jun. 16, 1978.
- /294/ VARY, P.: Ein Beitrag zur Kurzzeitspektralanalyse mit digitalen Systemen. Diss., Universität Erlangen-Nürnberg 1978.
- /295/ WELCH, P.D.: A Direct Method of Power Spectrum Estimation. IBM J., April 1961.

- /296/ WHITTLE, P.: Some Recent Contributions to the Theory of Stationary Processes. App. 2 in H. WOLD: A Study in the Analysis of Stationary Time Series, vgl. /41/. Stockholm 1954.
- /297/ WIGGINS, R.A. & E.A. ROBINSON: Recursive Solution to the Multi-Channel Filtering Problem. J. Geophys. Res., 70 (1965), 1885.
- /298/ ZAREMBA, S.K.: A Test of Fit for the Spectral Density Function of a Stochastic Process. Monatshefte für Mathematik, 64 (1960), 68.
- /299/ ZOHAR, S.: The Solution of a Toeplitz Set of Linear Equations. J. Ass. Comp. Mach., 21 (1974), 272.
- /300/ ———: FORTRAN Subroutines for the Solution of Toeplitz Sets of Linear Equations. IEEE Trans., ASSP-27 (1979), 656.

